Exercices MPSI - MP

Olivier Roques

2014-2016

Sommaire

Partie 1

Exercices MPSI

Sans précisions supplémentaires, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n est un entier naturel et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

1 Théorie des ensembles

Exercice 1.1. Soient E, F, G, H des ensembles non vides, $f \in \mathcal{F}(E,F)$, $g \in \mathcal{F}(G,H)$. Soit

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{F}(F,G) & \longrightarrow & \mathcal{F}(E,H) \\ u & \longmapsto & g \circ u \circ f \end{array}$$

Montrer que si f est injective et g surjective, alors φ est surjective.

Exercice 1.2. Soit E un ensemble fini et A, B deux parties de E. On considère l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (A \cap X, B \cap X) \end{array}$$

Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur A et B pour que f soit surjective, puis injective. Lorsque f est bijective, déterminer f^{-1}.

2 Calculs algébriques et nombres complexes

Exercice 2.1. *Sommation d'*Abel
Soit (a_n), (b_n) deux suites à valeurs complexes. On définit la suite (A_n) par $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

(a) Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_k = b_n A_n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k)$.

(b) En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} k 2^k$.

Exercice 2.2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la valeur de $T_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 x^k$.

Exercice 2.3. Calculer $\sum\limits_{z \in \mathbb{U}_n} |z - 1|$.

Exercice 2.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n}) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

3 Corps des réels et fonctions usuelles

Exercice 3.1. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3.2. Pour $x \in \mathbb{R}$, résoudre $\arcsin x - \arccos x = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 3.3. Calculer $\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$.

4 Arithmétique

Exercice 4.1. Trouver le dernier chiffre décimal de $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}$.

Exercice 4.2. *Équation diophantienne*
Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Résoudre $26x + 15y = 4$.

Exercice 4.3. *Petit théorème de* FERMAT
Soit $p \in \mathbb{P}$. Montrer que pour tout $k \in [\![1\,, p-1]\!]$, $p \mid \binom{k}{p}$. En déduire alors que $n^p \equiv n \pmod p$ pour tout entier n.

Exercice 4.4. Déterminer $(a + b) \wedge (a \vee b)$, pour $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4.5. *Nombres de* MERSENNE
Soient $a, n \in \mathbb{N},\ a, n \geq 2$. Montrer que

(a) $a^n + 1$ est premier $\implies$ a est pair et n est une puissance de 2.

(b) $a^n - 1$ est premier $\implies$ $a = 2$ et n est premier.

Exercice 4.6. *Théorème de* KURSCHAK
Soit $n \geq 2$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que S_n n'est jamais un entier.

Exercice 4.7. *Théorème des restes chinois*

(a) Soient n, m et c trois entiers tels que $n \wedge m = 1$. Montrer que l'équation $nx \equiv c \pmod m$ admet une unique solution modulo m.

(b) Soient n, m, a et b quatre entiers tels que $n \wedge m = 1$. Montrer que le système

$$\begin{cases} x & \equiv & a \pmod n \\ x & \equiv & b \pmod m \end{cases}$$

admet une unique solution modulo nm.

(c) Un phare émet un signal jaune toutes les 15 secondes et un signal rouge toutes les 28 secondes. On aperçoit le signal jaune 2 secondes après minuit et le rouge 8 secondes après minuit. Déterminer l'heure à laquelle les deux signaux seront émis en même temps pour la première fois.

5 Suites numériques

Exercice 5.1. Montrer que

$$(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ non majorée } \iff \exists\, \varphi \text{ extractrice telle que } u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Exercice 5.2. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée telle que $u_{2n} - 2u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 5.3. *Théorème de* CESÀRO
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{K}$. Montrer que $v_n = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exercice 5.4. *Suites de* CAUCHY
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La suite (u_n) est dite de Cauchy lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall p, q \geq N,\ |u_p - u_q| \leq \varepsilon$$

Montrer que

(a) (u_n) converge $\implies$ (u_n) est de Cauchy.

(b) (u_n) est de Cauchy $\implies$ (u_n) est bornée.

(c) (u_n) est de Cauchy $\implies$ (u_n) converge.

Exercice 5.5. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sin[(3+\sqrt{5})^n \pi]$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 5.6. *Suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$*
Étudier et trouver un équivalent de la suite (u_n) définie par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n - (u_n)^2 \end{cases}$$

Exercice 5.7. Soient a, b, c, d des complexes tels que $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$. Soit (z_n) la suite définie récursivement par

$$(z_n) : \begin{cases} z_0 \in \mathbb{C} \\ z_{n+1} = \frac{az_n+b}{cz_n+d} \end{cases}$$

On suppose dans toute la suite suite que z_0 est choisi de sorte que (z_n) soit bien définie.

(a) Montrer que la fonction $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ admet un ou deux points fixes dans $\mathbb{C}$.

(b) On suppose d'abord que f admet deux points fixes α et β. On pose $w_n = \frac{z_n-\alpha}{z_n-\beta}$. Montrer que la suite (w_n) est géométrique et en déduire la nature de la suite définie par $z_0 = i$ et $z_{n+1} = \frac{1}{1-z_n}$.

(c) On suppose maintenant que f admet un unique point fixe α. On pose $w_n = \frac{1}{z_n-\alpha}$. Calculer la valeur de α et montrer que $f(z) = z - \frac{c(z-\alpha)^2}{cz+d}$.

(d) Montrer ensuite que la suite (w_n) est arithmétique. En déduire la nature de la suite définie par $z_0 = i$ et $z_{n+1} = \frac{3z_n-1}{z_n+1}$.

Exercice 5.8. *Irrationalité de* e
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les suites $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$. Montrer que $((u_n),(v_n))$ forme un couple de suites adjacentes et montrer que leur limite est irrationnelle.

Exercice 5.9. Soit (u_n) une suite réelle telle que $(u_{n+1} - u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle.
Application : Soit a et b des réels tels que $a < b$, $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ continue et (u_n) la suite définie récursivement par

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Montrer que (u_n) converge si et seulement si $(u_{n+1} - u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

6 Limite et continuité

Exercice 6.1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction T-périodique continue. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 6.2. *Caractérisation des morphismes continus de* $(\mathbb{R}, +)$ *dans* $(\mathbb{R}, +)$
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un morphisme continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$. Montrer qu'il existe un réel α tel que pour tout réel x, $f(x) = \alpha x$.

Exercice 6.3. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante telle que $x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 6.4. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\exists \alpha, \beta > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f(x)| \leq \alpha x + \beta$$

Exercice 6.5. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue telle que $f(nt) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout réel $t > 0$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 6.6. Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

7 Dérivation

Exercice 7.1. On considère $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout n, pour tout $x > 0$ on a $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ où $P_n \in \mathbb{R}[X]$.

(b) Montrer alors que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.2. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est α-hölderienne avec $\alpha > 1$, *i.e.* qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $(x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$. Montrer que f est constante.

Exercice 7.3. Soit P une fonction polynomiale de degré impair et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(x)| \ \leq\ |P(x)|$$

Montrer que f est nulle.

Exercice 7.4. *Règle de* L'HÔPITAL
Soient deux réels $a < b$ et $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et dérivables sur $[a, b]$.

(a) Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a))$.

(b) Montrer alors que si $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \ell$.

Exercice 7.5. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et bornée.

(a) Montrer que s'il existe un entier n tel que $f^{(n)}$ admet un nombre fini de zéros, alors $f^{(k)}$ tend vers 0 en $\pm\infty$ pour tout $k \in [\![1\,, n]\!]$.

(b) En déduire que pour $n \geq 2$, $f^{(n)}$ s'annule au moins $n - 1$ fois.

Exercice 7.6. *Théorème de* DARBOUX
On suppose I ouvert. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On veut montrer que f', *a priori* non continue, vérifie toujours le théorème des valeurs intermédiaires.

(a) Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $f'(a) < f'(b)$ et soit $z \in]f'(a), f'(b)[$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $h \in [0\,, \alpha]$ on ait

$$\frac{1}{h}(f(a + h) - f(a)) < z < \frac{1}{h}(f(b + h) - f(b))$$

(b) Montrer alors l'existence d'un réel $h > 0$ et de $y \in I$ tels que $y + h \in I$ et $\frac{1}{h}(f(y + h) - f(y)) = z$.

(c) En déduire l'existence de $x \in I$ tel que $z = f'(x)$.

Exercice 7.7. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction deux fois dérivable et α un réel strictement positif. On suppose que f est majorée et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f''(t) \geq \alpha^2 f(t)$.

(a) Montrer que f est convexe et décroissante.

(b) Montrer que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ et que $\ell = 0$.

(c) Montrer que f' admet une limite finie ℓ en $+\infty$ et que $\ell = 0$.

(d) Montrer que $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est croissante et en déduire le signe de $\alpha f + f'$.

(e) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) \leq f(0)\, \mathrm{e}^{-\alpha t}$.

Exercice 7.8. *Inégalité de* KOLMOGROV
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f' sont bornées sur $\mathbb{R}$. On définit alors

$$M_0 = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \qquad M_2 = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f''(t)|$$

(a) Montrer que

$$\forall h > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq \frac{M_0}{2} + h\frac{M_2}{2}$$

(b) En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel t, $|f'(t)| \leq \sqrt{2 M_o M_2}$.

Exercice 7.9. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et f dérivable en 0. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$.

8 Analyse asymptotique

Exercice 8.1. Déterminer le développement asymptotique à 2 termes en $+\infty$ de

$$u_n = \sin[\pi n^3 (\ln(\frac{n}{n-1}))^2]$$

Exercice 8.2. Soit $n \geq 1$ et f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^{(n+1)x} - 1}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.

(b) En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.

Exercice 8.3. On considère l'équation $(\mathcal{E}) : x + \ln(x) = n$.

(a) Montrer que $(\mathcal{E})$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}_+^*$, puis montrer que la suite (x_n) est strictement croissante, de limite $+\infty$.

(b) Par développements limités successifs, montrer que $x_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Exercice 8.4. Soit $n \geq 2$ et $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_n(x) = x^{2n} - 2nx + 1$ pour tout réel x.

(a) Déterminer le nombre de solutions de $f_n(x) = 0$. On note désormais a_n la plus grande de ces solutions.

(b) Montrer que pour tout n, $a_n \in]1, 2[$ puis que la suite (a_n) converge vers 1.

(c) Déterminer un développement asymptotique à 2 termes de (a_n).

9 Polynômes

Exercice 9.1. Soient A, $B \in \mathbb{K}[X]$ non constants et premiers entre eux. Montrer qu'il existe un unique couple $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$AU + BV = 1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \deg U < \deg B \\ \deg V < \deg A \end{cases}$$

Exercice 9.2. Soit $n \geq 2$. Montrer que $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'admet pas de racines multiples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 9.3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer l'équivalence entre :

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$.

(ii) Il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

Exercice 9.4. Déterminer les polynômes P de degré supérieur ou égal à 1 tels que $P' \mid P$.

Exercice 9.5. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé.

(a) Montrer que P' est scindé.

(b) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha P + P'$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9.6. *Équations polynomiales*

(a) Déterminer les polynômes réels solutions de $P(X^2) = P(X-1)P(X+1)$.

(b) Déterminer les polynômes réels non nuls solutions de $P(X^2) = P(X-1)P(X)$.

Exercice 9.7. *Les polynômes de* Tchebychev
On appelle polynômes de Tchebychev de première espèce la suite de polynômes $(T_n) \in (\mathbb{R}[X])^{\mathbb{N}}$ qui vérifient pour tout réel θ et tout entier n la relation $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

(a) Montrer l'existence et l'unicité de T_n.

(b) Montrer que (T_n) vérifie la relation de récurrence $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

(c) Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n.

(d) *Application :* Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$||P||_\infty = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Exercice 9.8. Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de polynômes unitaires de degré $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients entier dont toutes les racines complexes sont de module inférieur ou égal à 1.

10 Fractions rationnelles

Exercice 10.1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la décomposition en éléments simples de $F_n = \frac{1}{X^n-1}$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 10.2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$ scindé à racines simples $x_1, \ldots, x_n$. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0$.

11 Espaces vectoriels

Exercice 11.1. Montrer que les familles suivantes sont libres :

(a) $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}} \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})^{\mathbb{R}}$ avec $f_\alpha : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$.

(b) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})^{\mathbb{N}^*}$ avec $f_k : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin(kx)$.

(c) $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}} \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})^{\mathbb{R}}$ avec $f_\alpha : x \in \mathbb{R} \longmapsto |x-\alpha|$.

(d) $((X-c_i)^n)_{1\leq i\leq n+1} \in \mathbb{K}[X]^{n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $c_1, \ldots, c_{n+1} \in \mathbb{K}$ deux à deux disjoints.

Exercice 11.2. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$u \text{ est une homothétie } \iff \forall x \in E,\ (x, u(x)) \text{ est liée}$$

Exercice 11.3. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $p \geq 1$. Montrer que

(a) $(\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^{p-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

(b) $(\mathrm{Id}_E - u)$ est inversible.

12 Espaces vectoriels de dimension finie

Dans cette section, E désigne un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

Exercice 12.1. Soient F, G deux sev de E. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur F et G pour qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f(F) = G$.

Exercice 12.2. Soient u, $v \in \mathcal{L}(E)$.

(a) Montrer que $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.

(b) On suppose que $u \circ v = 0$ et que $u + v$ est inversible. Montrer que $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) = n$.

Exercice 12.3. On suppose E de dimension $n \geq 1$. Soient F et G deux sev de E tels que $\dim F = \dim G = p$ où $0 \leq p \leq n$. Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun.

Exercice 12.4. Soient E_1, E_2, E_3 trois $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

(a) Soient $u \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ et $w \in \mathcal{L}(E_1, E_3)$. Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$ tel que $w = v \circ u$ si et seulement si $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} w$.

(b) Soient $w \in \mathcal{L}(E_1, E_3)$ et $v \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ tel que $w = v \circ u$ si et seulement si $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v$.

Exercice 12.5. *Caractérisation du centre de* $\mathrm{GL}(E)$
On suppose E de dimension $n \geq 1$. Déterminer le centre de $\mathrm{GL}(E)$ *i.e.* l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{f \in \mathrm{GL}(E) \mid \forall g \in \mathrm{GL}(E), fg = gf\}$$

Exercice 12.6. *Lemme des noyaux itérés*
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout entier p, on note $K_p = \operatorname{Ker} u^p$ et $I_p = \operatorname{Im} u^p$.

(a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.

(b) Montrer qu'il existe un entier $r \leq n$ minimal tel que $K_r = K_{r+1}$. Montrer que les suites (I_p) et (K_p) sont stationnaires à partir du rang r (pour l'inclusion).

(c) Montrer que $E = K_r \bigoplus I_r$ et en déduire l'existence de deux sev supplémentaires I et K de E tels que $u|_K$ soit nilpotent et $u|_I$ soit inversible.

(d) On suppose que u est nilpotent d'indice de nilpotence n. Montrer que les seuls sev de E stables par u sont les K_p avec $p \in [\![0\,,n]\!]$.

(e) Montrer que la suite $(\dim K_{p+1} - \dim K_p)$ est décroissante.

13 Matrices

Exercice 13.1. *Calcul des puissances d'une matrice*

(a) Soit $n \geq 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n.

Exercice 13.2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) Montrer que

$$\operatorname{rg} M = 1 \iff \exists\, U, V \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \text{ tels que } M = U^tV$$

(b) Si $\operatorname{rg} M = \operatorname{tr} M = 1$, en déduire que $M^2 = M$.

Exercice 13.3. *Matrices stochastiques*
Pour $n \geq 1$, on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $a_{i,j} > 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,,n]\!]^2$ et $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$ pour tout $i \in [\![1\,,n]\!]$.

(a) Montrer que $\mathcal{D}$ est stable par produit.

(b) Déterminer l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{D}$ inversibles telles que $A^{-1} \in \mathcal{D}$.

Exercice 13.4. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer l'équivalence entre :

(i) N est nilpotente.

(ii) N est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

Exercice 13.5. *Lemme d'*Hadamard
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall j \in [\![1\,,n]\!],\quad \sum_{1\leq j\neq i\leq n} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 13.6. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A^2 = 0$.

Exercice 13.7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose

$$\begin{array}{rccl} \varphi_A : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & M & \longmapsto & \operatorname{tr}(AM) \end{array}$$

(a) Montrer que φ_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(b) Montrer que pour tout $\Phi \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\Phi = \varphi_A$.

(c) Montrer alors que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

14 Déterminant

Exercice 14.1. Soient $p \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \cdots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix}$$

Exercice 14.2. Soit $n \geq 3,\ a, b \in \mathbb{K}$ et $a \neq b$. Calculer $\det A_n$ avec

$$A_n = \begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{pmatrix}$$

Exercice 14.3. Soient $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels.

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} (a_1+b_1)^{n-1} & (a_1+b_2)^{n-1} & \dots & (a_1+b_n)^{n-1} \\ (a_2+b_1)^{n-1} & (a_2+b_2)^{n-1} & \dots & (a_2+b_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n+b_1)^{n-1} & (a_n+b_2)^{n-1} & \dots & (a_n+b_n)^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

(a) Calculer le déterminant de M.

(b) Pour $p \in \mathbb{N}$ et n un entier tel que $n \geq p+1$, en déduire le déterminant de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2^p & \dots & n^p \\ 2^p & 3^p & \dots & (n+1)^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^p & (n+1)^p & \dots & (2n-1)^p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Exercice 14.4. *Déterminant de* CAUCHY
Soient $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ tels que pour tout $(i, j) \in [\![1\,, n]\!]^2,\ a_i + b_j \neq 0$. Calculer

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

Exercice 14.5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$

(a) Monter que $\det M \geq 0$.

(b) On suppose que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Exercice 14.6. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 14.7. Soit $n \geq 2$.

(a) Soient $A,\ B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B)$.

(b) Soient $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En considérant $(A - \lambda\,\mathrm{I}_n)$ et $(B - \lambda\,\mathrm{I}_n)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, montrer que $\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B)$.

(c) En déduire que si A et B sont semblables, $\mathrm{Com}(A)$ et $\mathrm{Com}(B)$ le sont aussi.

(d) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer le rang de $\mathrm{Com}(A)$ en fonction du rang de A.

15 Intégration sur segment

I désigne ici un segment de $\mathbb{R}$ et on note $I = [a, b]$ avec a, b des réels tels que $a < b$.

Exercice 15.1. *Intégrale de* WALLIS
On définit la suite $(W_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \,\mathrm{d}t$.

(a) Définir une relation de récurrence pour W_n.
(b) Calculer W_n en distinguant le cas pair et impair.
(c) Montrer que $((n+1)W_n W_{n+1})$ est une suite constante.
(d) En déduire un équivalent de W_n en $+\infty$.

Exercice 15.2. *Somme de* RIEMANN
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

(a) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite ℓ.
(b) Donner un équivalent de $(\ell - u_n)$ en $+\infty$.

Exercice 15.3. *Approximation uniforme*
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que pour tout $k \in [\![0\,,n]\!]$

$$\int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

(a) Montrer que f s'annule en au moins $n+1$ points distincts dans $]a, b[$.
(b) Si l'égalité est vraie pour tout entier k, montrer que $f = 0$.

Exercice 15.4. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective.

(a) Justifier que f est strictement croissante.
(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a

$$xf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

(c) Montrer alors que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ on a

$$xy \leq \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^y f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 15.5. Pour a, b des réels tels que $0 < a < b$, déterminer

$$\lim_{x\to 0} \left(\int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t \right)$$

Exercice 15.6. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout réel $x > 0$, on définit

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

On suppose de plus que f converge en $+\infty$ vers un réel ℓ.
Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \ell$.

Exercice 15.7. *Problème de* Bâle

On cherche à calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. On admet ici l'existence de cette somme. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

(a) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,,\pi]$. Montrer que

$$\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(b) Calculer $A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos(kt)$ pour $t \in \,]0\,,\pi]$.

(c) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

(d) Montrer alors que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 15.8. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue positive sur I et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement positive sur I. On pose $M = \sup\limits_{t\in I} |f(t)|$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_I f^n g\right)^{\frac{1}{n}} = M$$

Exercice 15.9. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que

$$\lim_{t\to+\infty}(f'(t) + \alpha f(t)) = 0$$

Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

16 Combinatoire et espaces probabilisés

Exercice 16.1. Soit E un ensemble fini tel que $|E| = n$. Calculer $\sum\limits_{X\in\mathcal{P}(E)} |X|$.

Exercice 16.2. Soit $S(p,n)$ le nombre de surjections de $[\![1\,,p]\!]$ dans $[\![1\,,n]\!]$ avec p, $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Déterminer la valeur de $S(p,n)$ lorsque $n > p$ puis celle de $S(n,n)$.

(b) Déterminer la valeur de $S(n+1,n)$.

Exercice 16.3. *Indicatrice d'*Euler

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Omega = [\![1\,,n]\!]$ muni de la probabilité uniforme. Pour tout diviseur d de n, on note A_d l'événement *"être divisible par d"*.

(a) Calculer $P(A_d)$.

(b) Montrer que si $p_1, \ldots, p_n$ sont des diviseurs de n deux à deux premiers entre eux, alors les événements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_n}$ sont indépendants.

(c) En déduire le cardinal $\varphi(n)$ de l'ensemble des entiers de Ω premiers à n.

Exercice 16.4. On effectue des tirages indépendants avec remise dans une urne contenant une boule rouge et une boule blanche. Soit A l'évènement *"on tire indéfiniment une boule rouge"*. Déterminer la probabilité de A dans les 3 cas suivants :

(i) Après chaque tirage, on introduit dans l'urne (en plus de la boule tirée) deux autres boules de la couleur de la boule tirée.

(ii) Après chaque tirage, on introduit cette fois dans l'urne trois autres boules de la couleur de la boule tirée.

(iii) Après le k-ème tirage, on rajoute k^2 boules de la couleur de la boule tirée.

17 Variables aléatoires

Exercice 17.1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et X, Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes à valeurs dans $[\![0\,,N]\!]$ telles que pour tout $r \in [\![0\,,N]\!]$, $E[X^r] = E[Y^r]$. Montrer que X et Y suivent la même loi.

Exercice 17.2. Une urne contient 2 boules blanches et $(n-2)$ boules rouges, avec $n \geq 2$. On effectue des tirages sans remise dans cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne.

(a) Déterminer la loi de X et calculer $E[X]$.

(b) Exprimer Y en fonction de X et calculer $E[Y]$.

Exercice 17.3. Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0, 1, 2, \dots$ de gauche à droite. Une puce se trouvant au départ sur la case 0 se déplace vers la droite de 1 ou 2 cases au hasard à chaque saut. On définit X_n la variable aléatoire donnant le numéro de la case occupée par la puce après n sauts et Y_n la variable aléatoire donnant le nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts.

(a) Déterminer la loi de Y_n puis calculer $E[Y_n]$ et $V(Y_n)$.

(b) Exprimer X_n en fonction de Y_n, en déduire la loi de X_n puis calculer $E[X_n]$ et $V(X_n)$.

Exercice 17.4. On joue à pile ou face avec une pièce dont la probabilité d'obtenir face est $\frac{1}{3}$. Les lancers sont indépendants. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux piles consécutifs pour la première fois. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité de l'événement $(X = n)$. On note de plus F_i l'événement *"obtenir face au $i^{\text{ème}}$ lancer"*.

(a) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $p_n = \frac{1}{3}\, p_{n-1} + \frac{2}{9}\, p_{n-2}$.

(b) En déduire l'expression de p_n pour $n \geq 1$.

Exercice 17.5. *Points fixes et dérangements*
On munit le groupe symétrique S_n de l'équiprobabilité.

1. *Dérangements*
   (a) Déterminer p_n, la probabilité qu'une permutation soit un dérangement (*i.e.* sans point fixe).
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.
2. *Points fixes*
   On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes d'une permutation.

(a) Déterminer la loi de X_n.

(b) Montrer que pour tout entier n, $P(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$.

(c) Déterminer $E[X_n]$ puis $V(X_n)$.

Exercice 17.6. Soit $n \geq 2$ et $(X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une famille de variables réelles mutuellement indépendantes, centrées et réduites. On pose $M = (X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D = \det M$.

(a) Montrer que D est centrée.

(b) Déterminer $E[D^2]$.

18 Espaces préhilbertiens

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne dans cette section un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien.

Exercice 18.1. *Produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*
On considère l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $(A, B) \longmapsto \operatorname{tr}({}^tAB)$.

(a) Montrer que cette application est un produit scalaire pour lequel la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée.

(b) Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'inégalité $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

(c) Soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\|AU\| = \|UA\| = \|A\|$.

(d) Montrer que $|\operatorname{tr}(A)| \leq \sqrt{n}\,\|A\|$.

(e) Soit $U = (u_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice orthogonale. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} u_{i,j}\right| \leq n$.

Exercice 18.2. *Projections orthogonales*
On suppose E euclidien.

(a) Soient F et G deux sev de E. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

(b) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

(c) Soient F et G deux sev de E tels que $F^\perp \perp G^\perp$. On note p_F, p_G et $p_{F\cap G}$ les projections orthogonales respectivement sur F, G et $F \cap G$.
Montrer que $p_F + p_G - p_{F\cap G} = \mathrm{Id}_E$ et que $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = p_{F\cap G}$.

Exercice 18.3. Calculer $m = \displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t\ln t - at - b)^2\,\mathrm{d}t$ et trouver pour quel couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ce minimum est atteint.

Exercice 18.4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre

(i) $\langle x, y\rangle = 0 \implies \langle u(x), u(y)\rangle = 0$

(ii) Il existe un scalaire $k \geq 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = k\,\|x\|$

(iii) u est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

Exercice 18.5. *Polynômes orthogonaux*

On considère le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ donné par $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Pour tout n, on définit

$$P_n = X^n(X-1)^n \qquad \text{et} \qquad L_n = P_n^{(n)}$$

(a) Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\langle L_n, Q\rangle = 0$. En déduire que la famille de polynômes (L_n) est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

(c) Calculer $\|L_n\|$.

(d) Déterminer une famille de polynômes (K_n) vérifiant les deux conditions suivantes :
   (i) pour tout n, K_n est de degré n et son coefficient dominant est strictement positif ;
   (ii) pour tout $N \in \mathbb{N}$, $(K_n)_{0\le n\le N}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_N[X]$.

   Puis justifier l'unicité d'une telle famille.

Exercice 18.6. Soient $(e_1, \ldots, e_n) \in E^n$ tels que pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle^2$.

(a) Si les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ sont unitaires, montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

(b) On suppose que $\dim E = n$ mais les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ sont maintenant quelconques. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ reste une base orthonormée de E.

Exercice 18.7. *Déterminant de* GRAM

On appelle *matrice de* GRAM de $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ la matrice

$$\mathrm{Gram}(x_1 \ldots, x_n) = (\langle x_i, x_j\rangle)_{1\le i,j\le n}$$

et on note son déterminant $\mathrm{G}(x_1, \ldots, x_n)$.

(a) Montrer que $\mathrm{rg}(\mathrm{Gram}(x_1, \ldots, x_n)) = \mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_n)$. En déduire que

$$(x_1, \ldots, x_n) \text{ est libre } \iff \mathrm{G}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$$

(b) On suppose E euclidien orienté de dimension $n \ge 1$. Montrer que

$$\mathrm{G}(x_1, \ldots, x_n) = [x_1, \ldots, x_n]^2$$

(c) Dans le cas général, soit F un sev de E de dimension finie $n \ge 1$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base quelconque de F. Montrer que pour tout $x \in E$ on a

$$\mathrm{d}(x, F)^2 = \frac{\mathrm{G}(e_1, \ldots, e_n, x)}{\mathrm{G}(e_1, \ldots, e_n)}$$

Exercice 18.8. On suppose E euclidien de dimension n. Montrer qu'on peut trouver $x_1, \ldots, x_n$ unitaires et distincts tels que pour tout $(i, j) \in [\![1\,, n]\!]$, $i \neq j$, $\langle x_i, x_j\rangle = -\frac{1}{n}$.

Exercice 18.9. *Inégalité d'*HADAMARD

On suppose E euclidien orienté de dimension $n \ge 1$. Soient $x_1, \ldots, x_n \in E$. Montrer que

$$|\,[x_1, \ldots, x_n]\,| \le \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

Partie 2

Exercices MP

Sans précisions supplémentaires, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n est un entier naturel et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

1 Convexité

Exercice 1.1. *Inégalité harmonico-arithmético-géométrique*
Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Exercice 1.2. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe qui présente en $a \in I$ un minimum local. Montrer que a est un minimum global de f.

Exercice 1.3. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que f est lipschitzienne sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I avec $a < b$ des réels.

Exercice 1.4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\ln f$ est convexe si et seulement si f^α est convexe tout $\alpha > 0$.

Exercice 1.5. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on ait

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Montrer que f est convexe.

Exercice 1.6. *Inégalités de* Hölder *et* Minkowski
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a_k, b_k des réels positifs pour tout $k \in [\![1\,, n]\!]$ et $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) Montrer que pour tous a, $b > 0$ on a

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q} \geq ab$$

(b) Montrer que $t \longmapsto t^p$ est convexe. En déduire *l'inégalité de* Hölder :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

(c) Montrer que $t \longmapsto (1 - t^{\frac{1}{p}})^p$ est convexe sur $[0\,,1]$. En déduire *l'inégalité de* Minkowski :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(d) Monter que pour toutes fonctions réelles continues $f,\ g$ sur $[a, b]$ avec $a < b$, on a les inégalités :

$$\int_a^b |fg| \ \leq \ \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ \leq \ \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

2 Séries numériques

Exercice 2.1. Soit (a_n) une suite de réels positifs telle que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge. Étudier la nature des séries suivantes :

$$\text{(i)} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 \qquad \text{(ii)} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{1+a_n} \qquad \text{(iii)} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n a_{2n} \qquad \text{(iv)} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$$

Exercice 2.2. *Règle de* Raabe-Duhamel
Soit $a \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite à termes positifs vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

(a) On suppose $a > 1$ et on pose $v_n = \frac{1}{n^b}$ avec $b \in]1, a[$. En comparant u_n et v_n, montrer que $\sum u_n$ converge. De même, montrer que $\sum u_n$ diverge si $a < 1$.
(b) On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + O\big(\frac{1}{n^2}\big)$. On pose $v_n = \ln(nu_n)$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$. Montrer que $w_n = O\big(\frac{1}{n^2}\big)$ puis en déduire que $\sum u_n$ diverge.

Exercice 2.3. *Séries de* Bertrand
Montrer que

$$\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge} \iff \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou } \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$$

Exercice 2.4. *Comparaison série-intégrale*

(a) Donner un équivalent de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}$ en $+\infty$. En déduire la nature de la série $\sum \frac{1}{S_n}$.

(b) Donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln k)^2$ en $+\infty$. En déduire la nature de la série $\sum \frac{1}{S_n}$.

Exercice 2.5. *Formule de* Stirling
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{\mathrm{e}^n\, n!}{n^n\sqrt{n}}$

(a) Étudier la nature de la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

(b) A l'aide des intégrales de Wallis, trouver un équivalent de $n!$ en $+\infty$.

Exercice 2.6. *Nature d'une série suivant un paramètre*
En fonction des paramètres indiqués, discuter la nature des séries de terme général :

(a) $u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}+b^n}$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

(b) $u_n = \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^\alpha}$ pour $n \geq 1$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.7. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de classe C^1 telle que $\frac{f'}{f}$ tende vers $-\infty$ en $+\infty$. Montrer que la série $\sum f(n)$ converge et donner un équivalent de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2.8. Étudier la nature des séries de terme général :

(a) $u_n = \sin(\pi\,\mathrm{e}\,n!)$.

(b) $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ pour $n \geq 1$.

(c) $u_n = \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$ pour $n \geq 1$.

Exercice 2.9. Soit $\alpha > 0$ un nombre irrationnel. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, montrer

$$\exists (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leq q \leq N,\ \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qN}$$

Donner alors la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 \sin^2 n}$.

Exercice 2.10. Soit (u_n) une suite à termes positifs et décroissante telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que $u_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 2.11. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs avec $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que si la suite $(S_n - nu_n)$ est bornée, alors $\sum u_n$ converge.

3 Structures algébriques

Dans cette section, $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque.

Exercice 3.1. Soit A un anneau tel que pour tout $x \in A$, $x^2 = x$.

(a) Montrer que $\mathrm{car}(A) = 2$ et que A est commutatif.

(b) Montrer que si A est intègre, $A = \{0, 1\}$.

Exercice 3.2. *Caractérisation du centre de S_n*
Pour $n \geq 3$, montrer que le centre de S_n est réduit à l'identité i.e que

$$\{\sigma \in S_n \mid \forall \tau \in S_n,\ \tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau\} = \{\mathrm{Id}\}$$

Exercice 3.3. Soit A un anneau commutatif intègre non nul.

(a) Montrer que si A est fini, A est un corps.

(b) Montrer que si A n'a qu'un nombre fini d'idéaux, A est un corps.

Exercice 3.4. *Théorème de* Wilson
Montrer qu'un entier $p \geq 2$ est premier si et seulement si $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

Exercice 3.5. Montrer que les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont soit dense dans $\mathbb{R}$, soit de la forme $m\mathbb{Z}$ avec $m \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3.6. Soit f un morphisme d'un groupe fini $(G, \cdot)$ dans $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Calculer $\sum\limits_{x \in G} f(x)$.

Exercice 3.7. *Sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*
Soit n un entier non nul.

(a) Montrer qu'un entier k engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si $k \wedge n = 1$.

(b) Montrer que l'ordre de $\overline{k}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est $\frac{n}{n \wedge k}$.

(c) Montrer que les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont cycliques.

(d) Montrer que pour entier d tel que $d \mid n$, il existe un unique sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de cardinal d.

Exercice 3.8. *Degré d'une extension de corps*
Soient K, L, M trois corps tels que K est un sous-corps de L qui lui-même est un sous-corps de M.

(a) Montrer que L peut être muni d'une structure de K-espace vectoriel, puis que M peut être muni d'une structure de L-espace vectoriel et d'une structure de K-espace vectoriel.

(b) On suppose que L est un K-espace vectoriel de dimension finie n et que M est un L-espace vectoriel de dimension finie p. Démontrer que M est un K-espace vectoriel de dimension finie dont on précisera la dimension.

Exercice 3.9. Soit G un groupe et H, K des sous-groupes de G d'ordre des entiers premiers. Montrer que $H = K$ ou que $H \cap K = e$. Montrer alors que dans un groupe d'ordre 35, il existe un élément d'ordre 5 et un élément d'ordre 7.

Exercice 3.10. *Indicatrice d'*Euler
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. φ désigne l'indicatrice d'Euler.

(a) Déterminer $|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*|$.

(b) Déterminer les deux derniers chiffres décimaux de 3^{2015}.

(c) Déterminer $\sum\limits_{k \mid n} \varphi(k)$.

(d) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(n) = +\infty$.

Exercice 3.11. *Carrés de $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$*
Soit $(G, .)$ un groupe fini, $(H, .)$ un groupe et $f : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupe.

(a) Montrer que $|G| = |\operatorname{Im}(f)| \cdot |\operatorname{Ker}(f)|$.

(b) Soit $p \geq 3$ premier. Déterminer le nombre de carrés dans $\mathbb{F}_p$.

(c) Montrer que x est un carré dans $\mathbb{F}_p^*$ si et seulement si $x^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}$.

(d) Déterminer les nombres premiers pour lesquels $\overline{-1}$ est un carré de $(\mathbb{F}_p)^*$.

4 Intégrales généralisées

Exercice 4.1. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f : x \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k + x}$$

Exercice 4.2. Soit $f : a \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^a \,\mathrm{d}t$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f. Étudier sa continuité et sa dérivabilité.

(b) Donner une expression simple de f.

Exercice 4.3. Soit $F : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+x} \,\mathrm{d}t$.
Déterminer la limite et un équivalent de F en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 4.4. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, décroissante et de limite nulle en $+\infty$. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.5. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, nulle en 0. On pose

$$I_0 = \int_0^{+\infty} f(x)^2 \,\mathrm{d}x \qquad I_1 = \int_0^{+\infty} f'(x)^2 \,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} f''(x)^2 \,\mathrm{d}x$$

Montrer que si f^2 et $(f'')^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$, alors $(f')^2$ également et $I_1^2 \leq I_0 I_2$.

Exercice 4.6. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et décroissante telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et soit non nulle. Montrer, pour tout $t > 0$, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f(nt)$ et en donner un équivalent lorsque $t \longrightarrow 0^+$.

Exercice 4.7. Soit $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On suppose que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g$ converge et vaut ℓ.
Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} g(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \ell$.

Application : Étudier la dérivabilité de $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t$ sur $]0\,, +\infty[$ et donner une expression simple de $F(x)$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.8. *Étude de la fonction* Gamma

On définit la fonction *Gamma* par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de Γ.

(b) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et convexe sur $\mathcal{D}$.

(c) Montrer que Γ est logarithmiquement convexe, *i.e.* que $\ln\Gamma$ est convexe.

(d) Montrer, pour tout $x \in \mathcal{D}$, les relations

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \text{et} \qquad \Gamma(n+1) = n!$$

En déduire alors un équivalent de Γ en 0.

(e) En introduisant $I_n(x) = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t$, montrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

5 Suites et séries de fonctions

Exercice 5.1. Soit $S : x \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$.

(a) Déterminer le domaine de définition de S.

(b) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(c) Montrer que S est strictement monotone et convexe.

(d) Déterminer la limite et un équivalent de S en chacune des bornes de son domaine de définition.

Exercice 5.2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

Exercice 5.3. On définit $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer que S est bien définie, de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer ses variations.

(b) Déterminer les limites de S en 0 et $+\infty$.

(c) Simplifier $S(x+1) + S(x)$ et en déduire un équivalent simple de S en $+\infty$.

Exercice 5.4. Soit $S : x \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

(a) Déterminer le domaine de définition de S.

(b) Étudier le caractère $\mathcal{C}^1$ de S.

(c) Déterminer un équivalent de S en la borne inférieure de son domaine de définition.

(d) Montrer que $S'(x) = -\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

(e) En déduire un équivalent de S' en $+\infty$.

Exercice 5.5. Montrer que la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0\,, n] \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 5.6. $I = [a, b]$ est ici un segment de $\mathbb{R}$. Soit $f_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On définit par récurrence $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que $\sum f_n$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 5.7. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est une fonction polynomiale.

Exercice 5.8. Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs et strictement croissante de limite $+\infty$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \, \mathrm{e}^{-a_n t} \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{a_n}$$

Exercice 5.9. *Théorèmes de* Dini
I est ici un segment de $\mathbb{R}$. Soit la suite (f_n) de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ continues telle que (f_n) converge simplement vers une fonction continue f. Montrer que la convergence vers f est uniforme lorsque :

(i) La suite (f_n) est croissante.

(ii) Chaque fonction f_n est croissante.

(iii) Il existe $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que toutes les fonctions f_n soient K-lipschitziennes.

6 Réduction des endomorphismes

Exercice 6.1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour que la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ soit diagonalisable.

Exercice 6.2. *Matrice compagnon*
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ unitaire de degré $n \geq 1$.

(a) Montrer qu'il existe $M_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, appelée *matrice compagnon de* P, telle que $\chi_{M_P} = P$.

(b) Montrer que $\mu_{M_P} = \chi_{M_P} = P$.

Exercice 6.3. *Résultats divers*
Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

(a) On suppose dans cette question que u est diagonalisable de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ avec $p \in [\![1\,, n]\!]$. Montrer que $\mu_u = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$.

(b) Montrer que u stabilise une droite ou un plan.

(c) On décompose χ_u en produit de facteurs irréductibles : $\chi_u = \prod_{k=1}^{r} P_k^{\alpha_k}$ où $r, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont des entiers naturels non nuls et $P_1, \ldots, P_r$ sont des polynômes irréductibles. Montrer que pour tout $k \in [\![1\,, r]\!]$, $\dim \operatorname{Ker} P_k^{\alpha_k} = \alpha_k \deg P_k$.

Exercice 6.4. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) Si A est inversible, montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

(b) En considérant la matrice $(A - \lambda \mathrm{I}_n)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, montrer que c'est encore le cas si A n'est pas inversible.

(c) Idem en utilisant cette fois la matrice J_r.

(d) Idem en considérant les matrices $A' = \begin{pmatrix} X\,\mathrm{I}_n & -A \\ B & -\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ B & -X\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$.

Exercice 6.5. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini et commutatif à $q \geq 1$ éléments. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^q = f$.

Exercice 6.6. Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Montrer l'équivalence entre

(i) Tous les espaces propres de f sont des droites.

(ii) Il n'existe qu'un nombre fini de sev stables par f.

Exercice 6.7. Soit $n \geq 2$ et

$$M = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ avec } b \neq 0.$$

(a) Déterminer les valeurs propres de M et montrer que M est diagonalisable.

(b) Lorsque M est inversible, calculer l'inverse de M.

(c) Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer M^p.

Exercice 6.8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\Gamma = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; M^5 = M^2 \text{ et } \operatorname{tr} M = n \right\}$.

Exercice 6.9. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. On suppose que $AB = 0$. Montrer que A et B sont co-trigonalisables.

Exercice 6.10. Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout entier p, $1 \leq p \leq n$, $\operatorname{tr}(f^p) = 0$. Montrer que f est nilpotente.

Exercice 6.11. Soient $a_1, \ldots, a_{n-1}$ et $b_1, \ldots, b_{n-1}$ des réels avec $n \geq 3$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6.12. *Diagonalisation d'une matrice circulante*
On considère la matrice circulante A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ et on pose } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

En exprimant alors A comme un polynôme en la matrice J, diagonaliser A.

Exercice 6.13. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

On définit le polynôme P_n par $P_n(x) = \det(x\,\mathrm{I}_n - A_n)$ avec $x \in \mathbb{R}$.

(a) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, déterminer une relation linéaire d'ordre 2 vérifiée par la suite $(P_n(x))$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|2 - x| < 2$. Après avoir justifié l'existence d'un unique $\theta \in]0\,,\pi[$ tel que $2\cos\theta = 2 - x$, déterminer $P_n(x)$ en fonction de $\sin((n+1)\theta)$ et $\sin(\theta)$.

(c) Déterminer les valeurs propres de A_n.

(d) Montrer alors que A_n est diagonalisable, puis déterminer une base de vecteurs propres de A_n en précisant pour chacun la valeur propre associée.

Exercice 6.14. *Équation de* Sylvester
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre :

(i) Pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AX - XB = C$.

(ii) Pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AX = XB \implies X = 0$.

(iii) $\chi_A(B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

(iv) A et B n'ont pas de valeurs propres communes.

Exercice 6.15. *Réduction simultanée*
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$. On considère une famille $(f_i)_{i\in I}$ d'endomorphismes de E commutant deux à deux.

(a) Si les f_i sont diagonalisables, montrer qu'on peut les diagonaliser tous dans une même base.

(b) Si les f_i sont trigonalisables, montrer qu'on peut les trigonaliser tous dans une même base.

Exercice 6.16. *Décomposition de* Dunford
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que son polynôme caractéristique χ_u soit scindé sur $\mathbb{K}$. Montrer qu'il existe un unique couple $(d, n) \in (\mathcal{L}(E))^2$ avec d diagonalisable et n nilpotente tel que $u = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$.
Application : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur M pour que $\mathrm{e}^{tM} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 6.17. *Matrices entières d'ordre fini*
Soit $n \geq 2$. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est d'ordre fini s'il existe un entier $d \geq 1$ tel que $M^d = \mathrm{I}_n$. Dans ce cas, le plus petit entier $\omega \geq 1$ vérifiant $M^\omega = \mathrm{I}_n$ s'appelle l'ordre de M, qu'on note aussi $\omega(M)$. On note OF_n le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ constitué des matrices d'ordre fini.
On cherche à montrer qu'à n fixé, l'ensemble $\{\omega(M) \mid M \in OF_n\}$ est borné et que les groupes multiplicatifs inclus dans OF_n sont finis. Soit donc $M \in OF_n$.

(a) Montrer que M est diagonalisable et exprimer ses valeurs propres.

(b) Montrer que les coefficients de χ_M sont des entiers relatifs et que ses racines sont toutes de module 1.

(c) On écrit $\chi_M(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$. Montrer que $|a_k| \leq \binom{n}{k}$ pour tout $k \in [\![0\,,n]\!]$.

(d) Montrer alors l'existence d'un entier K_n ne dépendant que de n tel que si $M \in OF_n$, alors $\omega(M) \leq K_n$.

(e) Soit désormais G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ inclus dans OF_n et $M \in G$. Montrer que $M = \mathrm{I}_n$ si et seulement si $\operatorname{tr} M = n$.

(f) Soit $V = \mathrm{Vect}(G)$ le sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par G. Montrer que V est de dimension finie et justifier l'existence d'une base $(M_1, \ldots, M_d)$ de V formée d'éléments de G.

(g) Soit $T : G \longrightarrow \mathbb{C}^d$ définie par $T(A) = (\operatorname{tr}(AM_1), \ldots, \operatorname{tr}(AM_d))$. Montrer que T est injective. En déduire que G est fini.

7 Espaces vectoriels normés et topologie

Exercice 7.1. Soit I un segment non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $E = \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$.

(a) Déterminer une suite de fonctions (f_n) de E telle que $\|f_n\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(b) Déterminer une suite de fonctions (f_n) de E telle que $\|f_n\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(c) Déterminer une suite de fonctions (f_n) de E telle que $\|f_n\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\|f_n\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 7.2. Soit E un $\mathbb{R}$-ev normé et A, B deux parties de E. On note

$$A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$$

(a) Si A est ouvert et B quelconque, montrer que $A + B$ est ouvert.

(b) Si A est compact et B fermé, montrer que $A + B$ est fermé.

Exercice 7.3. Soit E un $\mathbb{K}$-ev normé.

(a) Soient A et B deux parties disjointes de E avec A ouvert. Montrer que $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

(b) Soit U un ouvert non vide de E. Montrer que $\mathrm{Vect}\, U = E$.

(c) Soient U un ouvert dense de E et D une partie dense de E. Montrer que $U \cap D$ est dense dans E.

(d) Soit A une partie convexe de E. Montrer que l'adhérence et l'intérieur de A sont convexes.

Exercice 7.4. Soit E un $\mathbb{K}$-ev normé de dimension finie et K un compact de E. On pose

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u(K) \subset K\}$$

(a) Montrer que $\mathcal{A}$ est compact si et seulement si $\operatorname{Vect} K = E$.

(b) On suppose dans cette question que 0 est intérieur à K. Montrer que $\mathcal{A}$ est un compact de $\mathcal{L}(E)$ et que pour tout $u \in \mathcal{A}$, $|\det u| \leq 1$.

Exercice 7.5. Soient E, F, K trois $\mathbb{K}$-ev normés avec K compact. Soit

$$f: \begin{array}{ccc} E \times K & \longrightarrow & F \\ (\lambda, x) & \longmapsto & f(\lambda, x) \end{array}$$

une application continue. Pour tout $y \in F$, on note $E_y = \{\lambda \in E \mid \exists x \in K,\ f(\lambda, x) = y\}$.

(a) Montrer que E_y est un fermé de E.

(b) On fixe $y \in E$. On suppose que pour tout $\lambda \in E_y$, il existe un unique $x \in K$ tel que $f(\lambda, x) = y$ et on note $x = \varphi(\lambda)$. Montrer que l'application $\varphi : E_y \longrightarrow K$ ainsi définie est continue.

Exercice 7.6. Soit un entier $n \geq 2$.

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que A et $2A$ soient semblables. Montrer que A est nilpotente.

(b) Montrer qu'il n'existe pas de norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $N(PAP^{-1}) = N(A)$.

Exercice 7.7. *Théorème du relèvement*
Soit $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$ telle que $|f(t)| = 1$ pour tout $t \in I$. On souhaite prouver l'existence de $\alpha \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ telle que pour tout $t \in I$ on ait $f(t) = \mathrm{e}^{i\alpha(t)}$.

(a) Montrer que si α_1 et α_2 sont deux solutions du problème, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $t \in I$, $\alpha_2(t) = \alpha_1(t) + 2k\pi$.

(b) Soit $t_0 \in I$ et α_0 un argument de $f(t_0)$. En considérant $\alpha(t) = \alpha_0 + \frac{1}{i} \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$, montrer que le problème admet bien une solution.

Exercice 7.8. *Théorème des compacts emboîtés*
Soit E un $\mathbb{K}$-ev normé et $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de compact non vides de E décroissante pour l'inclusion.

(a) Montrer que $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i \neq \emptyset$.

(b) On note $\operatorname{diam}(A) = \displaystyle\sup_{(x,y)\in A^2} \mathrm{d}(x, y) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Montrer que si $\operatorname{diam}(K_i) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i$ est réduit à un unique élément de E.

(c) *Théorème de* DINI *:* Soit K un compact de E, (f_n) une suite de fonctions dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ tel que (f_n) converge simplement vers $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. On suppose de plus que (f_n) est croissante, *i.e.* pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in K$, $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$. Montrer alors que la convergence est uniforme.

Exercice 7.9. *Théorèmes de points fixes*
Soit E un $\mathbb{K}$-ev normé de dimension finie et K une partie non vide de E.

(a) *Théorème de* BANACH *:* Soit $f : K \longrightarrow K$ contractante, *i.e.* il existe $\lambda \in [0\,, 1[$ tel que pour tout $(x, y) \in K^2$, $\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$. Montrer que f admet un unique point fixe dans K.

(b) On suppose K compact et convexe. Soit $f : K \longrightarrow K$ 1-lipschitzienne. Montrer que f admet un point fixe.

(c) On suppose K compact. Soit $f : K \longrightarrow K$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in K^2,\ x \neq y \implies \mathrm{d}(f(x), f(y)) < \mathrm{d}(x,y)$$

À l'aide du théorème des compacts emboîtes, montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 7.10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) Montrer que $\det(\mathrm{e}^A) = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} A}$.

(b) En déduire que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'exponentielle d'une matrice réelle, alors $\det M > 0$.

(c) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique, montrer que e^A est une matrice de rotation, *i.e.* $\mathrm{e}^A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7.11. *Lemme de* Riemann-Lebesgue
Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{K})$.

(a) Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t = 0$.

(b) Montrer, en justifiant la densité de $\mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{K})$ dans $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{K})$, que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t) \sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 7.12. *Isométries d'un compact*
Soit E un $\mathbb{K}$-ev normé compact et $f : E \longrightarrow E$ une application continue vérifiant pour tout $(x,y) \in E^2$, $\mathrm{d}(f(x), f(y)) \geq \mathrm{d}(x,y)$.

(a) Montrer que f est une isométrie, *i.e.* pour tout $(x,y) \in E^2$, $\mathrm{d}(f(x), f(y)) = \mathrm{d}(x,y)$.

(b) Montrer que f est bijective.

Exercice 7.13. Soit E un $\mathbb{K}$-ev muni d'une norme sous-multiplicative $\|\cdot\|$. On note $\mathcal{L}_c(E)$ l'algèbre des endomorphismes continus de E. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$.

(a) Pour tout n et pour tout $g \in \mathcal{L}_c(E)$, montrer que

$$\left\| \mathrm{e}^g - \left(\mathrm{Id}_E + \frac{g}{n}\right)^n \right\| \leq \mathrm{e}^{\|g\|} - \left(1 + \frac{\|g\|}{n}\right)^n$$

(b) En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\mathrm{Id}_E + \frac{f}{n}\right)^n = \mathrm{e}^f$$

(c) Plus généralement, si (f_n) est une suite de $\mathcal{L}_c(E)$ qui converge vers f, montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\mathrm{Id}_E + \frac{f_n}{n}\right)^n = \mathrm{e}^f$$

(d) Soient $u, v \in \mathcal{L}_c(E)$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\exp\left(\frac{u}{n}\right) \exp\left(\frac{v}{n}\right)\right)^n = \mathrm{e}^{u+v}$$

Exercice 7.14. *Une preuve du théorème de* Cayley-Hamilton
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $r > \max(\|A\|, \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda|)$ où $\|\cdot\|$ est une norme sous-multiplicative de $\mathbb{R}^n$.

(a) Montrer que la matrice $(r\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{I}_n - A)$ est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et expliciter son inverse.

(b) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^{k+1}\mathrm{e}^{i(k+1)\theta}(r\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{I}_n - A)^{-1}\,\mathrm{d}\theta$$

(c) Montrer alors que
$$\chi_A(A) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r\mathrm{e}^{i\theta}\,{}^t\mathrm{Com}(r\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{I}_n - A)\,\mathrm{d}\theta$$

(d) En déduire que $\chi_A(A)$ est la matrice nulle.

Exercice 7.15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si l'ensemble $\mathcal{S}(A) = \left\{PAP^{-1} \;\middle|\; P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\right\}$ est fermé.

Exercice 7.16. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ et k un entier tel que $1 \leq k \leq n-1$.

(a) Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Soit r le plus grand entier tel qu'il existe une sous-matrice carrée de M de côté r inversible. Montrer que $r = \mathrm{rg}\, M$.

(b) Montrer que $\Gamma_k = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{rg}\, A \leq k\}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(c) Déterminer l'adhérence de l'ensemble $\Delta_k = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{rg}\, A = k\}$.

Exercice 7.17. *Adhérence et intérieur des matrices diagonalisables*
On note $D_{\mathbb{K}}$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et n, p, q désignent des entiers naturels non nuls.

(a) Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$, $p = \deg A$ et $q = \deg B$. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rccc} \Phi : & (\mathbb{K}_{q-1}[X], \mathbb{K}_{p-1}[X]) & \longrightarrow & \mathbb{K}_{q+p-1}[X] \\ & (U, V) & \longmapsto & AU + BV \end{array}$$
est un isomorphisme si et seulement si A et B sont premiers entre eux.

(b) Montrer alors que l'ensemble $\mathcal{V} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P = n \text{ et } P \text{ à racines simples}\}$ est un ouvert de $\mathcal{U} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P = n\}$.

(c) En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant n valeurs propres distinctes est un ouvert puis déterminer l'intérieur de $D_{\mathbb{K}}$.

(d) *Densité des matrices diagonalisables dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: Montrer que $\overline{D_{\mathbb{C}}} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(e) Montrer que si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est trigonalisable, elle l'est dans une base orthonormée. Montrer alors que $\overline{D_{\mathbb{R}}} = \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ avec $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

8 Séries entières

Exercice 8.1. *Produit d'*Hadamard

(a) Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b. Montrer que si R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n b_n z^n$, on a $R \geq R_a R_b$.

(b) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ telle que $a_n > 0$ pour tout n. Discuter, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, du rayon de convergence R' de la série entière $\sum a_n^\alpha z^n$.

Exercice 8.2. *Calcul de séries entières*

(a) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.

(b) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

(c) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} H_n z^n$.

Exercice 8.3. *Méthode de l'équation différentielle*

(a) Soit $f(x) = \exp\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}\right)$. Montrer que f est développable en série entière sur $]-1\,,1[$.

(b) Soit $g(x) = (\arcsin x)^2$. Montrer que g est développable en série entière sur $]-1\,,1[$.

Exercice 8.4. *Critère d'*HADAMARD

Si (u_n) est une suite positive bornée, on note $\overline{\lim}\, u_n$ la limite de la suite $(\sup\limits_{p\geq n} u_p)_{n\in\mathbb{N}}$.

Justifier l'existence de cette limite pour (u_n). Montrer ensuite que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ est $\frac{1}{\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Exercice 8.5. *Inverse d'une fonction développable en série entière*

Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence strictement positif telle que $a_0 \neq 0$. On cherche à prouver que la fonction $\frac{1}{f}$ est développable en série entière au voisinage de zéro.

(a) On suppose que $\frac{1}{f} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (b_n).

(b) Soit alors (b_n) la suite définie par la relation de récurrence précédente. Montrer qu'il existe une constante réelle $C > 0$ telle que pour tout n, on ait $|b_n| \leq \frac{C^n}{|a_0|}$. En déduire que $\frac{1}{f}$ est développable en série entière.

Exercice 8.6. Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.

(a) On suppose que la série entière $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$. Montrer que pour tout $x \in\,]-R\,,R[$, on a $xf(x)^2 - f(x) + 1 = 0$.

(b) En déduire qu'il existe un réel $\rho > 0$ tel que $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ pour tout $x \in\,]-\rho\,,\rho[\, \setminus \{0\}$.

(c) Déterminer alors une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 8.7. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 8.8. *Séries génératrices*

1. Soit B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On convient que $B_0 = 1$.
   (a) Montrer que pour tout entier n, $B_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.
   (b) On pose $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$. Montrer que le rayon de convergence R de cette série entière n'est pas nul puis exprimer $f(z)$ par des fonctions usuelles pour $|z| < R$.
   (c) Montrer que $B_n = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.
2. Soit d_n le nombre de dérangements (*i.e.* de permutations sans point fixe) d'un ensemble à n éléments. On convient que $d_0 = 1$.
   (a) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.
   (b) On pose $D(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} z^n$. Montrer que le rayon de convergence R de cette série entière n'est pas nul puis calculer $D(z)$ pour $|z| < R$.
   (c) Déterminer alors d_n et montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $d_k = \lfloor \frac{k!}{\mathrm{e}} + \frac{1}{2} \rfloor$. En déduire $\lim\limits_{k \to +\infty} d_k$.

Exercice 8.9. Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon de convergence $R \geq 1$. On suppose que $b_n > 0$ pour tout n et que la série numérique $\sum b_n$ diverge. On pose $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$.

(a) S'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{A_n}{B_n} = \ell$, montrer que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n} = \ell$$

(b) Si on suppose simplement $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} A_k = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{C}$, montrer alors que $\lim\limits_{x \to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \ell$.

Exercice 8.10. *Théorème d'*Abel

Soit (a_n) une suite de réels telle que la série $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit de rayon de convergence 1. On suppose de plus que la série $\sum_n a_n$ converge et on note $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

(a) Montrer que pour tout $x \in [0\,,1[$ et tout $n \geq 1$, on a

$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k (x^k - 1) \right) + \left((x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n (x^{n+1} - 1) \right)$$

(b) Montrer alors que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$.

Exercice 8.11. *Théorème taubérien faible*

Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose de plus qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = S$ et que $a_n = o\big(\frac{1}{n}\big)$. Montrer que $\sum a_n$ converge et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

Exercice 8.12. *Principe des zéros isolés*

Soit $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

(a) On suppose qu'il existe une suite (u_n) dans $]-R\,,R[$ non stationnaire et de limite nulle telle que $f(u_n) = 0$ pour tout n. Montrer que f est nulle.

(b) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de tout point de $]-R\,,R[$.

(c) Montrer alors que si f admet une infinité de zéros dans un compact de $]-R\,,R[$, alors f est nulle.

Exercice 8.13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A} |\lambda|$ le rayon spectral de A. On suppose que $\rho(A) < 1$.

(a) Montrer que la série $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{\mathrm{tr}(A^k)}{k}$ converge. On note s sa somme.

(b) Soit $P_A(t) = t^n \chi_A(\frac{1}{t})$ avec $t \in [0\,,1]$. Après avoir justifier l'existence de l'intégrale, montrer que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{tr}(A^k)}{k} = -\int_0^1 \frac{P_A'(t)}{P_A(t)}\,\mathrm{d}t$$

(c) Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout réel t, montrer que $\exp\left(\int_0^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)}\,\mathrm{d}u\right) = \frac{\gamma(t)}{\gamma(0)}$.

(d) Montrer alors que $\mathrm{e}^{-s} = \det(\mathrm{I}_n - A)$.

Exercice 8.14. *Théorème de* LIOUVILLE

1. Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Pour $r \in [0\,,R[$, soit $g_r : \theta \in \mathbb{R} \longmapsto f(r\mathrm{e}^{i\theta}) \in \mathbb{C}$ et $m_r = \sup\limits_{\theta\in[0,2\pi]} |g_r(\theta)|$.
   (a) Soit $r \in [0\,,R[$. Montrer la formule de CAUCHY :
   $$a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [0\,,R[$, $|a_n r^n| \leq m_r$.
2. On suppose ici $R = +\infty$
   (a) Si f est bornée sur $\mathbb{C}$, montrer que f est constante.
   (b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ à coefficients positifs tel que $|f(z)| \leq P(|z|)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que f est un polynôme.
3. Soit D le disque ouvert unité et $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et développable en série entière sur D.
   (a) On suppose que f est nulle sur le cercle unité $\mathbb{U}$. Montrer que f est nulle.
   (b) On suppose que f est nulle sur un arc de cercle unité de longueur $\alpha > 0$. Montrer que f est nulle.

9 Endomorphismes symétriques des espaces euclidiens

Dans cette section, E désigne un $\mathbb{R}$-ev muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Exercice 9.1. On suppose E euclidien. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ et $v = u - \mathrm{Id}_E$.

(a) Montrer que $\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} v)^\perp$.

(b) Soit $x \in E$. On pose $u_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} u^k(x)$. Montrer que la suite $(u_n(x))$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\operatorname{Ker} v$.

Exercice 9.2. *Théorème de* Maschke
On suppose E euclidien. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$ de cardinal n.

(a) Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur E. On pose pour tout x, $y \in E$,

$$(x|y) = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}\langle g(x), g(y)\rangle$$

Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E.

(b) Montrer que les éléments de G sont orthogonaux pour $(\cdot|\cdot)$.

(c) Soit F un sev de E stable par tous les éléments de G. Montrer qu'il existe un supplémentaire de F dans E stable par tous les éléments de G.

(d) Soit $p = \frac{1}{n}\sum\limits_{g\in G} g$. Montrer que p est un projecteur orthogonal pour $(\cdot|\cdot)$.

(e) Montrer que pour tout $g \in G$, on a $p \circ g = g \circ p = p$. En déduire que $\operatorname{Im} p = \bigcap\limits_{g\in G}\operatorname{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 9.3. *Générateurs de* $\mathcal{O}(E)$
On suppose E euclidien de dimension n.

(a) Soient x, $y \in E$ distincts, non nuls et de même norme. Montrer qu'il existe une unique réflexion qui envoie x sur y.

(b) Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Montrer par récurrence sur $r = n - \dim\operatorname{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$ que u est la composition d'au plus r réflexions.

Exercice 9.4. Soit λ une valeur propre réelle de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que λ est nul. En déduire la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué de matrices toutes diagonalisables.

Exercice 9.5. Soient A, $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la fonction $f : t \longmapsto \mathrm{e}^{tA} - \mathrm{e}^{tB}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que $A = B$.

Exercice 9.6. *Théorème min-max de* Courant-Fischer
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres réelles. Soit également $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres associés. Pour $k \in [\![1\,, n]\!]$, on désigne par V_k le sev $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$, par W_k le sev $\mathrm{Vect}(e_k, \ldots, e_n)$ et par $\mathcal{F}_k$ l'ensemble des sev de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. On pose de plus pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $R_A(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2}$.

(a) Montrer que $\lambda_1 = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} R_A(x)$ et que $\lambda_n = \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} R_A(x)$.

(b) Montrer que $\max\limits_{x\in V_k\setminus\{0\}} R_A(x) = \lambda_k$.

(c) Soit V un sev de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. Vérifier que $V \cap W_k \neq \{0\}$.
En déduire que $\max\limits_{x\in V\setminus\{0\}} R_A(x) \geq \lambda_k$.

(d) Déduire des questions précédentes le *théorème du min-max* : $\lambda_k = \min\limits_{V\in\mathcal{F}_k\setminus\{0\}} \max\limits_{x\in V\setminus\{0\}} R_A(x)$.

Exercice 9.7. *Endomorphismes symétriques positifs et décomposition polaire*
On suppose E euclidien. Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. On dit que f est positif lorsque ses valeurs propres sont positives et on note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes positifs. De même, on dit que f est défini positif lorsque ses valeurs propres sont strictement positives et on note $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes définis positifs.

(a) Soit $f \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer qu'il existe un unique $g \in \mathcal{S}^+(E)$ (noté $\sqrt{f}$) tel que $g^2 = f$.

(b) *Théorème de* Riesz : Soit φ une forme linéaire sur E. Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = \langle x, x_0\rangle$.

(c) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme de E, noté f^* et appelé adjoint de f tel que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$.

(d) Montrer que $f \in \mathcal{S}^+(E)$ (resp. $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$) si et seulement si pour tout $x \in E$, $\langle f(x), x\rangle \geq 0$ (resp. $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\langle f(x), x\rangle > 0$).

(e) Montrer que $\mathcal{S}^+(E)$ est un fermé de $\mathcal{L}(E)$.

(f) Soit $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{Com} M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

(g) *Décomposition polaire* : Soit $f \in \mathrm{GL}(E)$. Montrer qu'il existe un unique couple $(u, s) \in \mathcal{O}(E) \times \mathcal{S}^{++}(E)$ tel que $f = u \circ s$.

Exercice 9.8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable.

(b) On suppose que $\dim \operatorname{Ker} A^2 = 1$ et qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable.

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable telle que $A^5 + A^3 + A = 3\,\mathrm{I}_n$. Déterminer A.

Exercice 9.9. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tAA ={}^t BB$.

(a) On suppose A inversible. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $B = PA$.

(b) Montrer le résultat précédent pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

Exercice 9.10. On suppose E euclidien. Soient $f \in \mathcal{S}(E)$ et $g \in \mathcal{S}^{++}(E)$ tels que pour tout $x \in E$, $|\langle f(x), x\rangle| \leq \langle g(x), x\rangle$.

(a) On pose pour tout x, $y \in E$, $(x|y) = \langle g(x), y\rangle$. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E.

(b) Montrer que $|\det f| \leq \det g$.

(c) On suppose maintenant $g \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que le résultat précédent reste vrai.

Exercice 9.11. Soit $E = \mathcal{C}^2([0\,,1], \mathbb{R})$.

(a) Montrer que $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.

(b) Montrer que les sev $V = \{f \in E \mid f = f''\}$ et $W = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ sont orthogonaux et supplémentaires, puis expliciter la projection orthogonale sur V.

(c) Pour α, $\beta \in \mathbb{R}$, on pose $W_{\alpha,\beta} = \{f \in E \mid f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$. Déterminer alors

$$\inf_{f \in W_{\alpha,\beta}} \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right) \mathrm{d}t$$

.

Exercice 9.12. *Propriétés de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$*

(a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer l'égalité

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est bien définie et est surjective. En déduire que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

(c) Soit $M \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{1}{k}\sum\limits_{p=0}^{k-1} M^p\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 9.13. *Projection sur un convexe fermé*

On suppose E euclidien. Soit $C \subset E$ un convexe fermé non vide.

(a) Établir *l'égalité de la médiane* : si u, v, $w \in E$ et $m = \frac{v+w}{2}$, alors

$$\|v-u\|^2 + \|w-u\|^2 = 2\|u-m\|^2 + \frac{1}{2}\|v-w\|^2$$

(b) Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe un unique $h \in C$ tel que $\|x - h\| = \mathrm{d}(x, C)$.
Le vecteur h est le projeté orthogonal de x sur C. On le note $p_C(x)$.

(c) Soit $x \in E$ et $c \in C$. Montrer que $\langle p_C(x) - x, p_C(x) - c\rangle \leq 0$.

(d) Soit $a \in E \setminus C$. Montrer l'existence d'un demi-espace affine fermé, *i.e.* d'une partie de E de la forme $\{x \in E \mid \varphi(x) \geq 0\}$ où $\varphi \in E^*$, qui contient C mais pas a.

Exercice 9.14. *Polynômes orthogonaux*

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout n, E_n désigne $\mathbb{R}_n[X]$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $w : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue strictement positive.

1. *Généralités*

   (a) Montrer que l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

   $$(P, Q) \longmapsto \langle P, Q\rangle = \int_a^b P(t)Q(t)w(t)\,\mathrm{d}t$$

   est un produit scalaire sur E.

   On appelle *système orthogonal* pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$ toute famille de polynômes $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout k, $\deg P_k = k$ et pour tout entiers $k \neq l$, $\langle P_k, P_l\rangle = 0$.

(b) Montrer que si (P_k) et (Q_k) sont deux systèmes orthogonaux de E, alors il existe une suite de réels (λ_k) telle que pour tout entier k, $P_k = \lambda_k Q_k$. En déduire l'existence et l'unicité d'une famille de polynômes orthogonale dont tous les éléments sont unitaires.

2. *Étude des zéros*

Soit désormais (P_n) un système orthogonal et k un entier naturel.

(a) Justifier l'existence de deux entiers p, q, de deux suites $(r_i)_{1\leq i\leq p}$ et $(s_j)_{1\leq j\leq q}$ de réels de $]a,b[$, de deux suites $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ et $(v_j)_{1\leq j\leq q}$ d'entiers respectivement impairs et pairs strictement positifs et de $Q \in E$ sans racines dans $]a,b[$ tels que

$$P_k = \prod_{i=1}^{p}(X - r_i)^{u_i} \cdot \prod_{j=1}^{q}(X - s_j)^{v_j} \cdot Q$$

(b) En déduire que si $p < k$, alors $\left\langle P_k, \prod\limits_{i=1}^{p}(X - r_i)\right\rangle = 0$.

(c) Montrer alors que toutes les racines complexes de P_k sont réelles, simples et dans l'intervalle $]a,b[$.

On désigne désormais par $r_{k,1} < r_{k,2} < \cdots < r_{k,k}$ les racines de P_k. On les appelle les *points de* Gauss du polynôme P_k.

3. *Relation de récurrence*

(a) On rappelle que (P_n) est un système orthogonal. Montrer qu'il existe trois réels $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ tels que $XP_n = \alpha_n P_{n-1} + \beta_n P_n + \gamma P_{n+1}$.

(b) On suppose que pour tout n, P_n est unitaire. Montrer l'existence de deux suites réelles $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ telles que pour tout $n \geq 1$, $P_{n+1} = (X + a_n)P_n + b_n P_{n-1}$.

10 Probabilités

Dans cette section, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

Exercice 10.1. *Inégalité de* Cantelli

Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance m et de variance V. On veut montrer pour tout $t > 0$ l'inégalité de Cantelli :

$$P(X - m \geq t) \leq \frac{V}{V + t^2}$$

(a) Montrer qu'on peut supposer $m = 0$.

(b) Soit $t > 0$. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$,

$$P(X \geq t) \leq P\left((X + y)^2 \geq (t + y)^2\right) \leq \frac{V + y^2}{(t + y)^2}$$

(c) En déduire le résultat.

Exercice 10.2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(a) Montrer que X est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geq 1} P(X \geq n)$ converge et qu'alors $E[X] = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.

(b) Montrer que X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geq 1} nP(X\geq n)$ converge.

(c) Montrer alors que

$$V(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}(2n-1)P(X\geq n)-\left(\sum_{n=1}^{+\infty}P(X\geq n)\right)^2$$

Exercice 10.3. Pour passer dans la classe supérieure, un étudiant doit réussir dans n matières indépendantes. Sa probabilité de réussite dans chacune de ces matières est de $p\in\,]0\,,1[$. En cas d'échec dans une matière, il redouble mais garde le bénéfice des matières validées. On note X le nombre d'années passées par l'élève dans sa classe actuelle.

(a) Déterminer la loi de X et son espérance.

(b) Donner un équivalent de cette espérance quand $n\longrightarrow+\infty$.

Exercice 10.4. *Lemme de* BOREL-CANTELLI
Soit (A_n) une suite d'événements.

(a) On suppose que $\sum P(A_n)$ converge. Montrer que $P(\bigcap\limits_{m\geq 0}\bigcup\limits_{n\geq m}A_n)=0$.

(b) On suppose que les A_n sont indépendants deux à deux et que $\sum P(A_n)$ diverge. Montrer que $P(\bigcap\limits_{m\geq 0}\bigcup\limits_{n\geq m}A_n)=1$.

Exercice 10.5. Soit $p\in\,]0\,,1[$, $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0,1\}$ suivant la loi $\mathcal{B}(p)$ et Y la variable aléatoire donnant le temps d'attente de la séquence $(1,1)$, *i.e.* $Y=\min\{n\geq 2\mid (X_{n-1},X_n)=(1,1)\}$.

(a) Montrer que Y est bien une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}$ et que $P(Y=+\infty)=0$.

(b) Déterminer la fonction génératrice de Y.

(c) En déduire l'espérance et la variance de Y.

Exercice 10.6. *Méthode probabiliste d'*ERDÖS
Soient $v_1,\dots,v_n$ des vecteurs unitaires d'un espace euclidien E. On dit qu'une variable aléatoire X est de Rademacher si elle est à valeur dans $\{\pm 1\}$ avec $P(X=1)=P(X=-1)=\frac{1}{2}$.

(a) Déterminer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire de Rademacher.

(b) Soit $X_1,\dots,X_n$ des variables de Rademacher indépendantes. Soit $R=\left\|\sum\limits_{i=1}^{n}X_iv_i\right\|^2$. Montrer que R est bien une variable aléatoire discrète puis déterminer l'espérance de R.

(c) Montrer alors l'existence d'une famille $(\varepsilon_i)_{1\geq i\geq n}\in\{\pm 1\}^n$ telle que $\left\|\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_iv_i\right\|\leq\sqrt{n}$.

Exercice 10.7. On considère une urne contenant $n\in\mathbb{N}^*$ boules numérotées de 1 à n. On y effectue une série de tirage avec remise. On note T_n la variable aléatoire donnant le numéro du tirage où, pour la première fois, chacune des n boules a été tirée au moins une fois. On admet que $P(T_n=+\infty)=0$.

(a) Pour tout $i\in[\![1\,,n]\!]$ et $p\in\mathbb{N}^*$, on note $B_{i,p}$ l'événement *"la boule numérotée i n'est pas apparue lors des p premiers tirages"*. Calculer $P(B_{1,p}\cup\dots\cup B_{n,p})$.

(b) En déduire la loi de T_n.

(c) Montrer que $E[T_n] = nH_n$.

Exercice 10.8. On suppose que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ contient au moins un événement ni négligeable ni presque sûr.

(a) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui préserve l'espérance, *i.e.* telles que pour toute variable aléatoire discrète réelle X admettant une espérance finie, $E[f(X)] = E[X]$.

(b) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui préserve la variance, *i.e.* telles que pour toute variable aléatoire discrète réelle X admettant un moment d'ordre 2, $V(f(X)) = V(X)$.

Exercice 10.9. *Produit eulérien de la fonction* ζ.
Soit $s \in]1, +\infty[$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers et on pose $g(n) = \frac{\lambda}{n^s}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que g soit un germe de probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$. On suppose désormais cette condition vérifiée.

(b) On pose $A_k = \{n \in \mathbb{N}^* \mid k|n\} = k\mathbb{N}^*$. Calculer $P(A_k)$ et déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $I \subset \mathbb{N}^*$ pour que les événements $(A_i)_{i\in I}$ soient mutuellement indépendants.

(c) Montrer que

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

(d) Soit $(p_k)_{k\geq 1}$ la suite des nombres premiers.
Montrer que les séries de termes généraux $\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ et $\frac{1}{p_k}$ divergent.

Exercice 10.10. *Inégalité de* Hoeffding
Soit Y une variable aléatoire discrètes à valeurs dans $[0\,, 1]$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ une famille de $n \in \mathbb{N}^*$ variables aléatoires discrètes et indépendantes de même loi que Y. On note $\overline{Y_n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ et μ l'espérance de Y.

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\theta > 0$ on a

$$P\left(\overline{Y_n} - \mu \geq \varepsilon\right) = P\left(\mathrm{e}^{n\theta\overline{Y_n}} \geq \mathrm{e}^{n(\mu+\varepsilon)\theta}\right)$$

(b) On note $\lambda(\theta) = \ln E[\mathrm{e}^{\theta Y}]$. Montrer alors que pour tout $\varepsilon > 0$ et $\theta > 0$

$$P\left(\overline{Y_n} - \mu \geq \varepsilon\right) \leq \mathrm{e}^{n(\lambda(\theta)-(\mu+\varepsilon)\theta)}$$

(c) Montrer que la fonction $g : \theta \longmapsto E[\mathrm{e}^{\theta Y}]$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(d) Déterminer $g'(\theta)$ et $g''(\theta)$ puis montrer que $g''(\theta) \leq g'(\theta)$

(e) En justifiant que $x - x^2 \leq \frac{1}{4}$ pour tout réel x, montrer que pour tout $\theta > 0$, $\lambda(\theta) \leq \frac{\theta^2}{8} + \mu\theta$.

(f) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\overline{Y_n} - \mu \geq \varepsilon\right) \leq \mathrm{e}^{-2n\varepsilon^2}$.

(g) Montrer alors que pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\overline{Y_n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2\,\mathrm{e}^{-2n\varepsilon^2}$.

(h) Montrer l'inégalité de Hoeffding :
Soient $a < b$ deux réels et X une variable aléatoires à valeurs dans $[a, b]$. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes de même loi que X. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - E[X]\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-2\frac{n\varepsilon^2}{(b-a)^2}\right)$$

Exercice 10.11. *"Le Blue Pinko d'Australie"*
Soit N une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ non presque sûrement nulle. Lorsque l'événement $(N = n)$ est réalisé, on lance n fois une pièce équilibrée donnant pile avec une probabilité $p \in]0\,,1[$. Soient S et E les variables aléatoires discrètes comptant respectivement le nombre de pile et de face obtenu.

(a) On suppose que $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer les lois de S et E et montrer que S et E sont indépendantes

On suppose désormais que S et E sont indépendantes. Pour tout $(a, b) \in [-1\,,1]^2$, on considère la série génératrice double

$$G(a, b) = \sum_{k,l=0}^{+\infty} P(S = k)P(E = l)a^k b^l$$

(b) Montrer que $G(a, b)$ est bien définie.
(c) Montrer que pour tout $(a, b) \in]-1\,,1[^2$ on a

$$G(a, b) = G_S(a)G_E(b) = G_N(pa + qb) = G_N(pa + q)G_N(p + qb)$$

(d) Montrer que G_N est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = \alpha y$ où α est une constante réelle. En déduire que N suit une loi de Poisson.

11 Équations différentielles linéaires

Exercice 11.1. Déterminer les solutions réelles définies sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :
(a) Équations linéaire du premier ordre :

$$(\mathcal{E}_1) :\ y' + y = \sin t \qquad (\mathcal{E}_2) :\ (1 + t^2)y' = ty + (1 + t^2) \qquad (\mathcal{E}_3) :\ (1 - t^2)y' + ty = 0$$

(b) Équations linéaires du second ordre :

$$(\mathcal{E}_1) :\ y''-5y+4y = 2x\cosh(x) \qquad (\mathcal{E}_2) :\ y''+y = \tan t\ \left(\text{sur }]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right) \qquad (\mathcal{E}_3) :\ t^2y'' = 2y+3t^2$$

Exercice 11.2. Déterminer les solutions réelles définies sur $\mathbb{R}$ des systèmes différentiels suivants :

$$(\mathcal{E}_1) : \left\{\begin{array}{lcl} x' &=& -x + 2y + \mathrm{e}^{3t}\arctan(3t) \\ y' &=& 2x + 2y + 2\,\mathrm{e}^{3t}\arctan(3t) \end{array}\right. \qquad (\mathcal{E}_2) : \left\{\begin{array}{lcl} x' &=& x + z \\ y' &=& -y - z \\ z' &=& 2y + z \end{array}\right.$$

Exercice 11.3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + \alpha y = \sin(\alpha t)$ en distinguant les cas suivant la valeur de α.

Exercice 11.4. Déterminer l'ensemble des fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

Exercice 11.5. *"Le facteur fantôme"*

(a) Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ telle que $f' + kf$ soit bornée. Montrer que f est bornée.

(b) Soient a, b deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $a(t) \geq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} b(t) = 0$. Montrer que toute solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$ tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 11.6. *Utilisation d'un développement en série entière*
En cherchant une solution développable en série entière, résoudre $(\mathcal{E}) : 4ty'' + 2y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11.7. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables et vérifiant $(\mathcal{E})$: $f'(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ pour tout $t > 0$.

Exercice 11.8. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis déterminer sa limite en 0 et en $+\infty$.

(b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle.

(c) Déterminer alors la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 11.9. *Lemme de* GRONWALL

(a) Soit $C \in \mathbb{R}_+^*$ et u, v deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$ à valeurs positives vérifiant pour tout $t \in [a, b]$, $u(t) \leq C + \displaystyle\int_a^t u(s)v(s)\,\mathrm{d}s$. Montrer le lemme de GRONWALL : pour tout $t \in [a, b]$, $u(t) \leq C \exp \displaystyle\int_a^t v(s)\,\mathrm{d}s$.

(b) Soit $A : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue et intégrable. Montrer alors que toute solution de $X' = A(t)X$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et admet une limite en $+\infty$.

Exercice 11.10. *Principe d'entrelacement des zéros de* STURM
Soit $q : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle $y'' + qy = 0$.

(a) Soient a, $b : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec $a \in \mathcal{C}^1$.
Montrer que l'équation $y'' + ay' + by = 0$ se ramène à une équation de la forme de $(\mathcal{E})$ via le changement de fonction inconnue $x(t) = y(t)\,\mathrm{e}^{\frac{A(t)}{2}}$ où A est une primitive de a.

(b) Montrer que le wronksien d'un couple de solutions de $(\mathcal{E})$ est constant.

(c) On suppose que q est intégrable. Soit f une solution bornée de $(\mathcal{E})$. Montrer que f' tend vers 0 en $+\infty$. En déduire que f admet des solutions non bornées.

(d) On suppose $q \leq 0$. Soit y une solution non nulle de $(\mathcal{E})$. Montrer que y s'annule au plus une fois.

(e) Soient q_1, $q_2 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $0 < q_1 \leq q_2$. Soit y_1 une solution non nulle de $y'' + q_1 y = 0$ et α, β deux zéros consécutifs de y_1. Soit y_2 une solution de $y'' + q_2 y = 0$. Montrer que y_2 s'annule sur $[\alpha, \beta]$.

(f) On suppose qu'il existe deux réels strictement positifs $m \leq M$ tels que $0 < m \leq q \leq M$. Soit y une solution non nulle de $(\mathcal{E})$ et α, β deux zéros consécutifs de y. Montrer que $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq \beta - \alpha \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$.

(g) On suppose que $\lim\limits_{t \to +\infty} q(t) = 1$. Montrer qu'on peut ranger les zéros de y solution non nulle de $(\mathcal{E})$ en une suite (t_n) strictement croissante et que $t_{n+1} - t_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \pi$.

Exercice 11.11. *Autour de $y'' + y = f$*
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle $y'' + y = f$.

(a) Trouver la forme générale des solutions de $(\mathcal{E})$.

(b) Montrer qu'il existe une unique solution φ_0 de $(\mathcal{E})$ qui vérifie $\varphi_0(0) = \varphi_0'(0) = 0$ et la déterminer.

(c) Déterminer les solutions paires de $(\mathcal{E})$ lorsque f est paire.

(d) On suppose f 2π-périodique. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que φ_0 soit aussi 2π-périodique.

(e) On suppose f intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que les solutions de $(\mathcal{E})$ sont bornées et qu'une seule de ces solutions admet une limite en $+\infty$.

(f) On suppose f dérivable et monotone sur $\mathbb{R}$, de limite finie en $+\infty$. Montrer que les solutions de $(\mathcal{E})$ sont bornées.

12 Calcul différentiel

Exercice 12.1. *Étude de continuité*
Étudier la continuité des fonctions suivantes :

(i) $(x, y) \longmapsto \begin{cases} y^x & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \text{ et } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sur $(\mathbb{R}_+)^2$.

(ii) $(x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } |x| > |y| \\ x & \text{si } |x| \leq |y| \end{cases}$ sur $\mathbb{R}^2$.

(iii) $(x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^2 \sin y}{e^{xy} - 1} & \text{si } xy \neq 0 \\ x & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12.2. *Étude d'extrema*
Étudier les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes :

(i) $(x, y) \longmapsto y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2}$ sur $\mathbb{R}^2$.

(ii) $(x, y) \longmapsto x^4 + y^4 - (x - y)^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(iii) $(x, y) \longmapsto x + y + \frac{1}{xy}$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

(iv) $(x, y, z) \longmapsto xyz \ln x \ln y \ln z$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$.

(v) $(x, y) \longmapsto x^2 y - y^2 x$ sur $[-1\,, 1]^2$.

(vi) $(x, y) \longmapsto \sin x \sin y \sin(x + y)$ sur $[0\,, 2\pi]^2$.

(vii) $(x, y) \longmapsto x^3 - 3xy$ sur $\mathcal{B}_f(0, 1)$.

Exercice 12.3. *Équations aux dérivées partielles*

(a) Déterminer toutes les solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ de

$$5\frac{\partial f}{\partial x} + 4\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

(b) Déterminer toutes les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

(c) Déterminer toutes les solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ de

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2$$

Exercice 12.4. Soient E, F et G des $\mathbb{R}$-ev normés et $\varphi : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire. On suppose que φ est continue et de sorte qu'il existe un réel $C > 0$ tel que $\|\varphi(x, y)\| \leq C \|x\| \cdot \|y\|$ pour tout $(x, y) \in E \times F$. Montrer que φ est différentiable sur $E \times F$ et calculer sa différentielle $\mathrm{d}\varphi$. *Application :* Soit n, $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $\varphi_p : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi_p(M) = M^p$ est différentiable et calculer sa différentielle $\mathrm{d}\varphi_p$.

Exercice 12.5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $\det : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \det(M)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer sa différentielle $\mathrm{D}_{\det}$.

Exercice 12.6. *Lemme d'*HADAMARD
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{U}$ telles que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{U}$, $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k f_k(x)$.

Exercice 12.7. Soient $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow R$ deux fonctions différentiables en $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\max(f, g)$ soit différentiable en x_0.

Exercice 12.8. Soit $\Omega =]0\,, +\infty[\times]0\,, +\infty[$. On cherche les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$(\mathcal{E}) : x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

On considère les sous-ensembles de $\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ suivants :

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}) \;\middle|\; f \text{ est solution de } (\mathcal{E}) \right\}$$

$$\Sigma_1 = \left\{ f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}) \;\middle|\; \text{ il existe } \alpha \in \mathcal{C}^2(]0\,, +\infty[, \mathbb{R}) \text{ telle que } f(x, y) = \alpha(xy) \right\}$$

$$\Sigma_2 = \left\{ f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}) \;\middle|\; \text{ il existe } \beta \in \mathcal{C}^2(]0\,, +\infty[, \mathbb{R}) \text{ telle que } f(x, y) = x\beta\left(\frac{y}{x}\right) \right\}$$

(a) Montrer que $\mathcal{S}$, Σ_1 et Σ_2 sont des espaces vectoriels et que $\Sigma_1 + \Sigma_2 \subset \mathcal{S}$.

(b) On considère l'application $\begin{array}{cccc} \Phi : & \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ & (x, y) & \longmapsto & \left(xy, \frac{y}{x}\right) \end{array}$. Montrer que Φ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$ de Ω. On notera dans la suite $u = xy$ et $v = \frac{y}{x}$.

(c) Soit $f \in \mathcal{S}$ et $g = f \circ \Phi^{-1}$. Montrer que g vérifie $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(u,v) = \frac{1}{2u}\frac{\partial g}{\partial y}(u,v)$.

(d) On pose $h = \frac{\partial g}{\partial y}$ et pour tout $v \in \,]0\,,+\infty[$, $\varphi_v : \,]0\,,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_v(u) = h(u,v)$. Montrer que $\varphi_v(u) = C(v)\sqrt{u}$ où C est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

(e) Montrer enfin que $\mathcal{S} = \Sigma_1 + \Sigma_2$.

Exercice 12.9. Déterminer les valeurs des réels $\alpha, \beta > 0$ tels que les fonctions suivantes soient de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = |x|^\alpha |y|^\beta \qquad\qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 12.10. Soit $n \geq 1$, $k \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f est k-homogène si pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $f(tx) = t^k f(x)$.

(a) Si f est 1-homogène, montrer que f est linéaire.

(b) Montrer que f est k-homogène si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf(x)$.

(c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur k pour qu'une fonction k-homogène soit prolongeable par continuité en 0. Montrer que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$ si $k > 1$.

Exercice 12.11. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Montrer que g est continue.

(b) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.

(c) *Application :* On pose pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y$, $h(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{\sinh x - \sinh y}$. Montrer que h se prolonge sur $\mathbb{R}^2$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 12.12. Soit $n \geq 2$.

(a) Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que la matrice jacobienne $J_f(x)$ est antisymétrique pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement s'il existe une matrice antisymétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = Ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $J_f(x)$ est symétrique pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement s'il existe une fonction $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $i \in [\![1\,,n]\!]$, $f_i(x) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$, où les $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont les fonctions coordonnées de f.

Exercice 12.13. On considère l'application $\begin{array}{rccc} f : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & M & \longmapsto & (\operatorname{tr} M, \operatorname{tr} M^2, \dots, \operatorname{tr} M^n) \end{array}$.

(a) Soient $n, p \in \mathbb{N}$ et $k \leq \min(n,p)$. En utilisant les matrices de Graam, montrer que le sous-ensemble formé des matrices de rang $r \in [\![k\,, \min(n,p)]\!]$ est un ouvert de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.

(c) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{rg} \mathrm{d}f(M) = \dim \operatorname{Vect}((\mathrm{d}f_k(M))_{0 \leq k \leq n-1})$ où $\mathrm{d}f_k(M)$ sont les fonctions coordonnées de $\mathrm{d}f(M)$.

(d) Montrer alors que $\operatorname{rg} \mathrm{d}f(M) = d$ où d est le degré du polynôme minimal de M.

(e) En déduire que l'ensemble des matrices dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 12.14. *Lemme de* POINCARÉ
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et $X : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$. On note $(X_1, \ldots, X_n)$ les fonctions coordonnées de X.

(a) Déterminer le gradient de la fonction $V : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 X_i(tx)\,\mathrm{d}t$$

(b) Montrer que le champ X dérive d'un potentiel si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1\,,n]\!]^2$, $\frac{\partial X_j}{\partial x_i} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$.

(c) Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{U}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer qu'il existe une fonction $\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = \mathrm{e}^{i\alpha(x,y)}$.

Partie 3

Exercices d'oraux

Sans précisions supplémentaires, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n est un entier naturel, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

Préparation aux oraux

Exercice 1. (a) Soit $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un morphisme de corps. Montrer que $\sigma = \mathrm{Id}$.

(b) Soient A, B, $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe α, β, $\gamma \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que $\alpha A + \beta B + \gamma C$ admette une valeur propre double.

(c) Déterminer $m = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid \text{Il existe un groupe non commutatif d'ordre } k\}$.

Exercice 2. *Centrale*
Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$ où les $(a_k)_{1 \leq k \leq p} \in (\mathbb{N}^*)^p$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Soit (X_n) une suite de vad indépendantes de même loi à valeurs dans A, telles que $P(X_n = a_k) \neq 0$ pour tout $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit G la fonction génératrice des (X_n).

(a) Montrer que $z \longmapsto 1 - G(z)$ est une fonction polynomiale sur $\mathbb{C}$ dont la seule racine de module ≤ 1 est 1.

(b) Soit A_n l'événement *"Il existe* $N \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $X_1 + \ldots X_N = n$*"*. Montrer que pour tout complexe $|z| < 1$, $\sum\limits_{n \geq 1} P(A_n) z^n$ converge. Exprimer alors cette somme en fonction de G.

(c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n) = \frac{1}{E[X_1]}$.

Exercice 3. *Centrale*
Soit E un espace euclidien et $\Gamma = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|\}$.

(a) Montrer que Γ est convexe et contient $\mathcal{O}(E)$.

(b) Soit $u \in \Gamma$. Montrer que s'il existe deux éléments distincts f et g de Γ tels que $u = \frac{f+g}{2}$ alors $u \notin \mathcal{O}(E)$.

(c) Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $\rho \in \mathcal{O}(E)$ et $s \in \mathcal{S}^+(E)$ tels que $v = \rho \circ s$.

(d) Montrer alors la réciproque de la question *(b)*.

Exercice 4. Soit $S : x \longmapsto \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}$.

(a) Déterminer le domaine de définition de S.

(b) Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,,+\infty[$.

(c) S est-elle dérivable en 0 ?

(d) S est-elle continue en 0 ?

Oraux Mines

Exercice 1. *2015*
Montrer qu'il est impossible de piper deux dés indépendants à 6 faces de telle sorte que la somme des dés suive une loi uniforme sur $[\![2\,,12]\!]$.

Exercice 2. *2015*
Soient a, b, c trois complexes tels que la suite $(a^n + b^n + c^n)$ converge vers 0. Montrer que a, b et c sont de module strictement inférieur à 1.

Exercice 3. *2015 - Théorème de* MASCHKE
Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(a) Soit $f = \sum\limits_{g\in G} g$. Que dire de f ? Déterminer alors ses valeurs propres.

(b) Caractériser l'espace propre lié à la valeur propre non nulle de f en fonction des éléments de G.

Exercice 4. *2015* Soit un réel $\lambda > 0$.

(a) Résoudre sur $]0\,,+\infty[$ l'équation

$$(\mathcal{E}) : ty' + \lambda y = \frac{1}{1+t}$$

(b) $(\mathcal{E})$ admet-elle des solutions continues en 0 ?

(c) $(\mathcal{E})$ admet-elle des solutions développables en série entière au voisinage de 0 ?

(d) Calculer $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}(1+3n)}$.

Exercice 5. *2015 - Intégrale de* DIRICHLET

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x\cos t}\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6. *2015*
Soit p, q, r des réels deux à deux distincts et $M = \begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{pmatrix}$. Montrer que M est une matrice de rotation si et seulement si $p^3 - p^2 = q^3 - q^2 = r^3 - r^2$.

Exercice 7. *2015*
Soit f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $f : P \longmapsto P'$ et $g : P \longmapsto XP$.

(a) Déterminer une norme telle que f soit continue.

(b) Déterminer une norme telle que g soit continue.

(c) Montrer qu'il n'existe pas de norme telle que f et g soient continues.

Exercice 8. *2015*
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

(a) Soit F un fermé non vide de E et $x \in E \setminus F$. Montrer que $\mathrm{d}(x, F) > 0$.

(b) Montrer que tout ouvert de E est une réunion dénombrable de fermés.

(c) Déterminer les fermés de E qui sont une réunion dénombrable d'ouverts.

Exercice 9. *2015*

(a) Soient E_1, E_2, E_3 trois $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.. Soient $u \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ et $w \in \mathcal{L}(E_1, E_3)$ tels que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} w$. Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$ tel que $w = v \circ u$.

(b) Soit φ une forme linéaire sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $C \in E$ telle que $\varphi(M) = \operatorname{tr}(CM)$ pour tout $M \in E$.

On fixe dorénavant $A \in E$ une matrice nilpotente.

(c) Soit $M \in E$ qui commute à A. Montrer que $\operatorname{tr}(AM) = 0$.

(d) Montrer qu'il existe $C \in E$ telle que pour tout $M \in E$, $\operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(C(AM - MA))$.

(e) Montrer que $A = CA - AC$.

Exercice 10. *2015*
On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [1\,, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin(\ln x)}{x} \end{array}$$

(a) Montrer que f' est intégrable sur $[1\,, +\infty[$.

(b) Donner la nature des séries de terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $v_n = f(n)$.

Exercice 11. *2015*
On pose $\alpha = 2^{\frac{2}{3}}$ et $F = \operatorname{Vect}_{\mathbb{Q}} \left\{\alpha^k \;\middle|\; k \in \mathbb{N}\right\}$.

(a) Montrer que F est un $\mathbb{Q} - ev$ de dimension 3.

(b) F est-il un sous-corps de $\mathbb{R}$?

Exercice 12. *2015*
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Exercice 13. *2015*
Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ définie par $\varphi(M) = aM + b\,{}^tM$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que φ soit un isomorphisme. Calculer $\det \varphi$ et $\operatorname{tr} \varphi$.

Exercice 14. *2015*
On considère la fonction

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_5[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}^6 \\ P & \longmapsto & (P(1), P(j), P(j^2), P'(1), P'(j), P'(j^2)) \end{array}$$

(a) Montrer que Φ est un isomorphisme.

(b) Montrer qu'il existe une unique base $(H_i)_{0\leq i\leq 5}$ de $\mathbb{C}_5[X]$ telle que pour tout $P \in \mathbb{C}_5[X]$,

$$P = P(1)H_0 + P(j)H_1 + P(j^2)H_2 + P'(1)H_3 + P'(j)H_4 + P'(j^2)H_5$$

(c) Calculer H_0 et H_3.

(d) Montrer que $P(X) \longmapsto P(jX)$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}_5[X]$ et en déduire la valeur des $(H_i)_{0\leq i\leq 5}$.

Exercice 15. *2015*
Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$$

Exercice 16. *2015*
Existe-t-il une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que l'espace vectoriel des matrices qui commutent avec A soit de dimension impaire ?

Exercice 17. *2015*
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$. Que dire de u si sa matrice dans toute base est diagonale ? Que dire de u s'il a même matrice dans toute base ?

Exercice 18. *2015*
Trouver tous les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $4A^3 + 2A^2 + A = 0$.

Exercice 19. *2015*
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto AM{}^tA$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que Φ_A soit inversible.

(b) Calculer $\det \Phi_A$ lorsque A est une matrice scalaire.

(c) Calculer $\det \Phi_A$ lorsque A est diagonale.

(d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que Φ_A soit un isomorphisme orthogonal de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique.

(e) Calculer $\det \Phi_A$ lorsque $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 20. *2015*

(a) Caractériser les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A{}^tA = {}^tAA$.

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A{}^tA = {}^tAA$. Montrer que ${}^tA \in \mathrm{Vect}(A)$.

(c) Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $A^2 - A + \mathrm{I}_2 = 0$ et ${}^tAA = A{}^tA$.

Exercice 21. *2015*

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que la suite $\left(\left(\mathrm{I}_n + \frac{A}{n}\right)^n\right)$ converge vers une matrice de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ que l'on précisera.

Exercice 22. *2015*
Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée, *i.e.* telle qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $B - A_p \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $A_{p+1} - A_p \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que (A_p) converge.

Exercice 23. *2015*
Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-evn et $f \in \mathcal{L}(E)$.

(a) Montrer que si f envoie chaque partie bornée sur une partie bornée, alors f est continue.

(b) Montrer que si f envoie toute suite de limite nulle sur une suite bornée, alors f est continue.

Exercice 24. *2015*
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-evn non réduit à $\{0\}$ et $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ continue non nulle. On pose

$$|||f||| = \sup_{y \in E\setminus\{0\}} \frac{f(y)}{\|y\|}$$

Soit $x \in E \setminus \operatorname{Ker} f$. Montrer que $\mathrm{d}(x, \operatorname{Ker} f) = \frac{|f(x)|}{|||f|||}$ puis que $\mathrm{d}(x, \operatorname{Ker} f)$ est atteinte si et seulement si $|||f|||$ est atteinte.

Exercice 25. *2015*
Soit $(x, \alpha) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Discuter de la nature de la série de terme général $u_n = x^{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, en fonction de x et de α.

Exercice 26. *2015*
En fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, discuter de la sommabilité des familles

$$\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$$

Exercice 27. *2015*
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}^*$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = f\left(\frac{3}{16x}\right)$.

Exercice 28. *2015*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit l'application $T : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}^*$,

$$T(f)(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n f(t) \,\mathrm{d}t$$

(a) Déterminer la valeur de $T(f)(0)$ pour que $T(f)$ soit continue.

(b) Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de T.

Exercice 29. *2015*
Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on a

$$a^{2n} - 1 = (a^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(a^2 - 2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)$$

(b) On pose $I(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2a\cos(t) + 1)\,\mathrm{d}t$. Calculer $I(a)$ en distinguant les cas $|a| < 1$ et $|a| > 1$.

Exercice 30. *2015*
Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

Exercice 31. *2015*
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On suppose que la suite $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que la suite de terme général $\frac{1}{p+1}\sum\limits_{k=0}^{p} u^k$ converge et préciser sa limite.

Exercice 32. *2015*
Pour $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, on pose $F(x) = \pi\frac{\cos \pi x}{\sin \pi x}$ et $G(x) = \frac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right)$. On pose finalement $H = F - G$.

(a) Montrer que G est bien définie.

(b) Montrer que H est 1-périodique, impaire et continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

(c) Montrer que $F\left(\frac{x}{2}\right) + F\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2F(x)$ et que $G\left(\frac{x}{2}\right) + G\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2G(x)$.

(d) Montrer que H est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, puis que $F = G$.

Exercice 33. *2015*
Soit la série entière $f : x \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln n x^n$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f.

(b) En considérant la fonction $x \longmapsto (1-x)f(x)$, donner un équivalent de f en 1 et en -1.

Exercice 34. Soit (a_n) une suite de réels positifs. Montrer que $a_n \underset{+\infty}{=} o(\sqrt{n})$ si et seulement si $\mathrm{e}^{a_n} \underset{+\infty}{\sim} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n$. Le résultat subsiste-t-il si les a_n ne sont pas tous positifs ?.

Oraux Centrale

Exercice 1. *2015*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(E_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ une suite d'événements quelconques. On suppose que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(E_n) \in \mathbb{R}$.

(a) Soit $Z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{E_n}$ (on convient que $Z = +\infty$ si la série diverge). Montrer que Z est une variable aléatoire discrète.

(b) Soit $F = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ appartient à un nombre fini de } (E_n)\}$. Montrer que F est un événement et que $P(F) = 1$.

(c) Montrer que Z admet une espérance.

Exercice 2. *2015*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction u_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$u_n(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

(a) Montrer que $\sum\limits_{n \geq 1} u_n(x)$ converge si $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que $f : x \longmapsto -\ln(x) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Montrer que f est l'unique fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$\begin{cases} f(x+1) - f(x) = \ln(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* \\ f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_+^* \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

(d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} \, \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

Exercice 3. *2015*
Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots x_p \in E$ et $\mathrm{Gram}(x_1, \dots, x_p) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

(a) Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Gram}(x_1, \dots, x_p) = {}^t M M$.

(b) Montrer que $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est une matrice de Gram si et seulement si A est symétrique à valeurs propres positives et de rang inférieur à n.

(c) Soient $u_1, \dots, u_n \in E$. Montrer que $\mathrm{Sp}\,\mathrm{Gram}(u_1, \dots, u_n) \subset \{0, 1\}$ si et seulement s'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et π un projecteur symétrique tel que $\pi(e_i) = u_i$ pour tout $i \in [\![1\,,n]\!]$.

Exercice 4. *2015*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. On note $E_P = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid P(M) = 0\}$. On dit que $M \in E_P$ est un point isolé de E_P s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de M tel que $E_P \cap \mathcal{V} = \{M\}$.

(a) Déterminer E_p et ses points isolés lorsque $n = 1$. On suppose désormais $n \geq 2$.

(b) Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}_0$ de 0_n tel que pour tout $H \in \mathcal{V}_0$, $(\mathrm{I}_n + H) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(c) Soit M un point isolé de E_P. Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de 0_n tel que pour tout $H \in \mathcal{U}$, $(\mathrm{I}_n + H)^{-1} M (\mathrm{I}_n + H) = M$.

(d) Montrer alors que M commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire la forme des points isolés de E_P.

(e) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver une suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ distincts deux à deux telle que

$$M_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda \, \mathrm{I}_n \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ (M_k - \lambda \, \mathrm{I}_n)^2 = 0$$

(f) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda\,\mathrm{I}_n$ est un point isolé de E_P si et seulement si λ est une racine simple de P.

Exercice 5. *2015*
Soit $I = [a\,,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ où a et b sont des réels tels que $a < b$.

(a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction réelle dérivable sur un intervalle soit strictement croissante.

(b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}_+)$ dont l'ensemble des zéros est d'intérieur non vide. Montrer qu'il existe une unique subdivision $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ de I vérifiant :

$$\forall i \in [\![1\,,n]\!],\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(c) Soit $g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}_+)$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} g(x_i)$.

Exercice 6. *2011*

(a) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_{-A}^{A} \frac{1}{z-t}\,\mathrm{d}t$.

Soient P, $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $F = \frac{P}{Q}$ soit bien définie et intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit $\mathcal{P}_F = \{a \in \mathbb{C} \mid a \text{ est un pôle de } F\}$. Pour $a \in \mathcal{P}_F$, on note R_a le coefficient de $\frac{1}{X-a}$ dans la décomposition de F en éléments simples.

(b) Calculer $\sum\limits_{a\in\mathcal{P}_F} R_a$.

(c) Montrer alors que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t = 2i\pi \sum_{a\in\mathcal{P}_F^+} R_a$ où $\mathcal{P}_F^+$ est l'ensemble des pôles de F de partie imaginaire strictement positive.

(d) Soient m, $n \in \mathbb{N}$ avec $m < n$. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7. Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ converge absolument.

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de terme général (u_n^k) converge absolument.

On suppose désormais que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n^k = 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $|u_n| < 1$. On pose $U(k) = \sum\limits_{n=0}^{n_0} u_n^k$ et $R(k) = \sum\limits_{n=n_0+1}^{+\infty} u_n^k$.

(b) Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} U(k) = \lim\limits_{k\to+\infty} R(k) = 0$.

(c) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Étudier la convergence de $\sum\limits_{n=0}^{n_0} P(u_n)u_n^k$. En déduire que $|u_n| < 1$ pour tout $n \in [\![0\,,n_0]\!]$.

(d) Montrer que la suite (u_n) est nulle.

Exercice 8. Soit $E = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ est continue et } 2\pi\text{-périodique}\}$. Pour un réel $a > 0$ et $f \in E$, on définit T_a l'application telle que $T_a(f) : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{a}\displaystyle\int_x^{x+a} f(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que $f \longmapsto \sup_{t\in[0,2\pi]} |f(t)|$ est une norme sur E.

(b) Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que T_a est un endomorphisme continu de E.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$, $h \in E$ de classe $\mathcal{C}^k$. Montrer que $T_a(h)$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ puis que $(T_a(h))^{(k)} = T_a(h^{(k)})$.

Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $\sum a_n$ converge. On fixe $f \in E$ et on considère la suite (f_n) d'éléments de E définie par $f_0 = f$ et $f_n = T_{a_n}(f_{n-1})$ pour tout $n \geq 1$.

(d) Montrer que (f_n) converge uniformément vers une fonction ψ.

(e) Montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 9. Pour tout réel $\alpha > 0$, on définit

$$\operatorname{Spec}(\alpha) = \{\lfloor k\alpha \rfloor \mid k \in \mathbb{N}^*\} \quad \text{et} \quad N(\alpha, n) = |\{k \in \mathbb{N}^* \mid \lfloor k\alpha \rfloor \leq n\}|$$

(a) Montrer que $N(\alpha, n) = \lceil \frac{n+1}{\alpha} \rceil - 1$.

(b) Soient α, $\beta \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que les ensembles $\operatorname{Spec}(\alpha)$ et $\operatorname{Spec}(\beta)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$ si et seulement si α et β sont irrationnels et que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

Exercice 10. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne associé au produit scalaire canonique $\|\cdot\| : M \longmapsto \sqrt{\operatorname{tr}({}^tMM)}$. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|M\| < 1$, on pose

$$\ln(\mathrm{I}_n + M) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} M^k$$

(a) Pour A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

(b) Montrer que $M \longmapsto \ln(\mathrm{I}_n + M)$ est bien définie pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|M\| < 1$.

(c) Montrer que pour $t \in [-1\,, 1]$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln(\mathrm{I}_n + tM) = M(\mathrm{I}_n + tM)^{-1}$$

(d) Montrer que $\mathrm{e}^{\ln(\mathrm{I}_n + M)} = \mathrm{I}_n + M$.

Exercice 11. Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

(c) Donner la limite et un équivalent de f en 0 puis en $+\infty$.

(d) Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\mathrm{e}^{xt} - 1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 12. On considère la suite réelle (x_n) définie par récurrence par $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $x_{n+1} = \sqrt{n + x_n}$. Donner un développement asymptotique à trois termes de (x_n).

Oraux X-ENS

Exercice 1. *ENS Paris 2015*

(a) Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $a_1 < \cdots < a_n$. On pose $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \, \mathrm{e}^{a_k x}$ et on suppose que f s'annule n fois. Montrer que les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont nuls.

(b) Soit $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $b_1 < \cdots < b_n$ et $A = (\mathrm{e}^{a_i b_j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrer que A est inversible.

(c) Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 2. *X 2015*
Un réel x est dit algébrique lorsqu'il annule un polynôme non nul à coefficients rationnels.

(a) Montrer que l'ensemble des réels algébriques est dénombrable.

(b) Soit x un réel algébrique. Montrer qu'il existe $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que, pour tout rationnel $r = \frac{p}{q}$ où $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on ait $|x - r| \geq \frac{a}{q^b}$.

(c) Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 10^{-n!}$ n'est pas algébrique.

Exercice 3. *X 2015*
Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un entier naturel $N \geq 2$ tel que pour tout $g \in G$, $g^N = \mathrm{Id}$. Montrer que G est fini.

Oraux CCP

Exercice 1. *2016*
On pose $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2 \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$.

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

(c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?